106 年大學入學指定科目考試
數學甲試題

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（佔 24 分）

1. 從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍， 試選出正確的選項。
   (1) $0.22 \le p < 0.33$　(2) $0.33 \le p < 0.44$　(3) $0.44 \le p < 0.55$
   (4) $0.55 \le p < 0.66$　(5) $0.66 \le p < 0.77$

2. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍， 試選出正確的選項。
   (1) $25 \le a^5 < 30$　(2) $30 \le a^5 < 35$　(3) $35 \le a^5 < 40$
   (4) $40 \le a^5 < 45$　(5) $45 \le a^5 < 50$

3. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 的函數圖形與 $y = 2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？
   (1) 2 個交點　(2) 3 個交點　(3) 4 個交點　(4) 5 個交點　(5) 6 個交點

4. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 3，
   且圖形 $y = f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x-4) = 0$，
   試問 $\int_1^4 f''(x)\,dx$ 之值為下列哪一選項？
   (1) -5　(2) -3　(3) 0　(4) 3　(5) 5

二、多選題（佔 40 分）

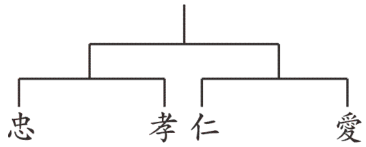
5. 設 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 為兩非零向量，夾角為 120° 。若 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 垂直，試選出正確的選項。
   (1) $\overrightarrow{u}$ 的長度是 $\overrightarrow{v}$ 的長度的 2 倍　(2) $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的夾角為 30°
   (3) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的夾角為銳角　(4) $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的夾角為銳角
   (5) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的長度大於 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的長度

6. 已知複數 z 滿足 $z^n + z^{-n} + 2 = 0$ ，其中 n 為正整數。將 z 用極式表示為 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$，且 $r > 0$ 。試選出正確的選項。
   (1) $r = 1$　(2) n 不能是偶數　(3)對給定的 n ，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設
   (4) θ 可能是 $\dfrac{3\pi}{7}$　(5) θ 可能是 $\dfrac{4\pi}{7}$

7. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y = f(x)$ 的圖形和直線 $y = g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。
   (1) $f(1) = g(1)$　(2) $f'(1) = g'(1)$　(3) $f''(1) = 0$
   (4)存在實數 $a \ne 1$ 使得 $f'(a) = g'(a)$　(5)存在實數 $a \ne 1$ 使得 $f''(a) = g''(a)$

三、選填題（佔 28 分）

A. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率為$\frac{4}{5}$，孝班勝過其他任何一班的機率為$\frac{1}{5}$，仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各為$\frac{1}{2}$。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。如果冠軍隊可獲得6000元獎學金，亞軍隊可獲得4000元獎學金，則孝班可獲得獎學金的期望值為________元。

B. 坐標平面上有三條直線L、L_1、L_2，其中L為水平線，L_1、L_2的斜率分別為$\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{3}$。已知L被L_1、L_2所截出的線段長為30，則L、L_1、L_2所決定的三角形的面積為________。

C. 坐標平面上，x坐標與y坐標均為整數的點稱為格子點。令n為正整數，T_n為平面上以直線$y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及x軸、y軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而a_n為T_n上的格子點數目，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$________。

D. 坐標空間中，平面$ax+by+cz=0$與平面$x=0$、$x+\sqrt{3}y=0$的夾角(介於$0°$到$90°$之間)都是$60°$，且$a^2+b^2+c^2=12$，則$\left(a^2,b^2,c^2\right)=$________。

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

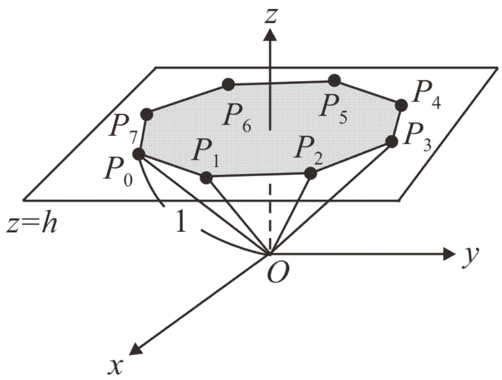
一、 在坐標平面上，考慮二階方陣$A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$所定義的線性變換。對於平面上異於原點$O$的點$P_1$，設$P_1$經$A$變換成$P_2$，$P_2$經$A$變換成$P_3$。令$a=\overline{OP_1}$。

(1)試求$\sin\left(\angle P_1OP_3\right)$。（4 分）

(2)試以a表示$\Delta P_1P_2P_3$的面積。（4 分）

(3)假設P_1是圖形$y=\frac{1}{10}x^2-10$上的動點，試求$\Delta P_1P_2P_3$面積的最小可能值。（4 分）

二、 坐標空間中，$O(0,0,0)$為原點。平面$z=h$（其中$0\le h\le 1$）上有一以$(0,0,h)$為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取8點構成正八邊形$P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段$\overline{OP_j}$（$0\le j\le 7$）的長度都是1。請參見示意圖。



(1)試以h表示向量內積$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}$。（4分）

(2)若$V(h)$為以O為頂點、正八邊形$P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$為底的正八角錐體積，試將$V(h)$表為h的函數（註：角錐體積$=\dfrac{1}{3}$底面積×高）。（2分）

(3)在$\overrightarrow{OP_0}$和$\overrightarrow{OP_4}$夾角不超過$90°$的條件下，試問正八角錐體積$V(h)$的最大值為何？（6分）

2017年指定科目考試數學甲試題

選擇題:1.(2)　2.(5)　3.(4)　4.(1)　5.(2)(3)　6.(1)(4)　7.(1)(2)(3)

選填題: A. 880　B. 216　C. 12　D. (3,1,8)

非選擇題：一. (1) $\frac{24}{25}$　(2) $\frac{3a^2}{25}$　(3) 9

二. (1) $2h^2-1$ (2) $V(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-h^3+h\right)$ (3) $\frac{1}{3}$