106 年大學入學學力測驗數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 35 分）

1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率爲r_1，而學生玩過的比率爲r_2，其中$r_1 \neq r_2$。
由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項：
(1)全校老師與學生比率　(2)全校老師人數　(3)全校學生人數
(4)全校師生人數　(5)全校師生玩過「寶可夢」人數。　【106 學測】

答：(1)

解：設全校老師有A人，全校學生有B人，則全校師生玩過「寶可夢」的比率$r=\dfrac{Ax+By}{A+B}$

可知只要知道全校老師與學生比率$\dfrac{A}{A+B}$、$\dfrac{B}{A+B}$，即可判定全校師生玩過寶可夢比率

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數a後，螢幕上的數會變成a^2。
當一開始時螢幕上的數b爲正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近81^3。
試問實數b最接近下列哪一個選項？
(1)1.7　(2)3　(3)5.2　(4)9　(5)81。　【106 學測】

答：(3)

解：由題意知$\left[\left(b^2\right)^2\right]^2=81^3 \Rightarrow b^8=3^{12} \Rightarrow b=3^{\frac{12}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}\approx 5.196$

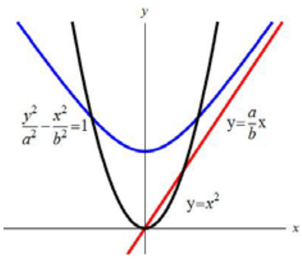
3. 設Γ：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$爲坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線爲$\ell$。
考慮動點$\left(t,t^2\right)$，從時間$t=0$時出發，當$t>0$時，請選出正確的選項：
(1)此動點不會碰到Γ，也不會碰到ℓ　(2)此動點會碰到Γ，但不會碰到ℓ
(3)此動點會碰到ℓ，但不會碰到Γ　(4)此動點會先碰到Γ，再碰到ℓ
(5)此動點會先碰到ℓ，再碰到Γ。　【106 學測】

答：(5)

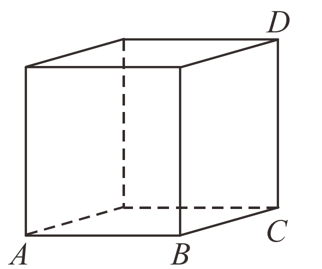
解：動點$\left(t,t^2\right)$在$y=x^2$上，

$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$的通過第一象限的漸近線爲$\ell$：$y=\dfrac{a}{b}x$

如圖，動點會先碰到ℓ，再碰到Γ，故選(5)



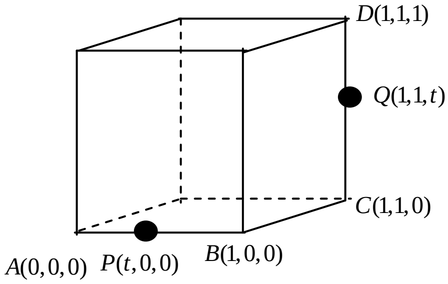
4. 在右圖的正立方體上有兩質點分別自頂點A、C同時出發，
各自以等速直線運動分別向頂點B、D前進，
且在1秒後分別同時到達B、D。
請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項：
(1)兩質點的距離固定不變　(2)兩質點的距離越來越小
(3)兩質點的距離越來越大　(4)在$\dfrac{1}{2}$秒時兩質點的距離最小



(5)在 $\dfrac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大。【106 學測】

答：(4)

解：$P(t,0,0)\in\overline{AB}$、$Q(1,1,t)\in\overline{CD}$，$0\le t\le 1$

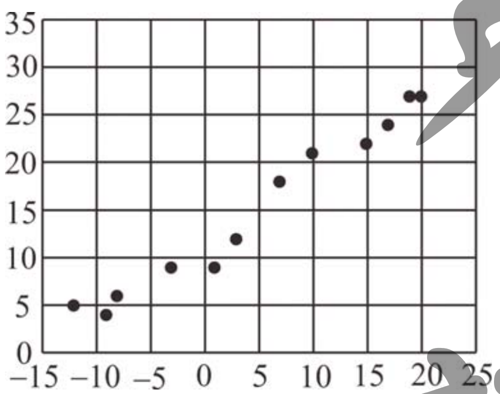


$$\overline{PQ}=\sqrt{(t-1)^2+1^2+t^2}$$

$$=\sqrt{2t^2-2t+2}=\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

當 $t=\dfrac{1}{2}$ 秒時，兩質點的距離 $\overline{PQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 最小

5. 下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x）與最高溫（縱軸 y）的散佈圖。



今以溫差（最高溫減最低溫）爲橫軸且最高溫爲縱軸重新繪製一散佈圖，試依此選出正確的選項：

(1)最高溫與溫差爲正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(2)最高溫與溫差爲正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

(3)最高溫與溫差爲負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(4)最高溫與溫差爲負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

(5)最高溫與溫差爲零相關。【106 學測】

答：(4)

解：由上圖知，

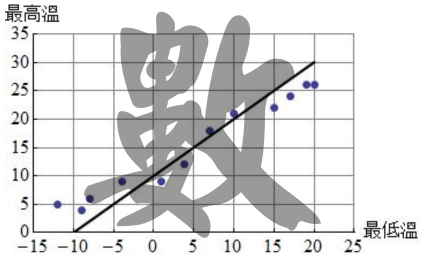
最高溫與最低溫爲正相關

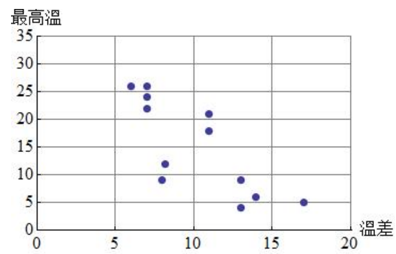
(相關係數約爲 0.98)

由下圖知，

最高溫與溫差爲負相關

(相關係數約爲 -0.77)





6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ\le\cos x$？

(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 4 個　(5)無窮多個。【106 學測】

答：(1)

解：$\dfrac{\pi}{2}\approx 1.57\cdots\le x\le\dfrac{3\pi}{2}\approx 4.71\cdots$，故 x° 位於第一象限，故 $\cos x^\circ>0$

$\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 時，$-1\le\cos x\le 0$

故$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$時，$\cos x^\circ>\cos x$才成立，故$\cos x^\circ\le\cos x$無解

7. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
(甲)每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
(乙)連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
(1)52 (2)60 (3)68 (4)76 (5)84。 【106 學測】

答：(2)

解：牛肉麵A、大滷麵B、咖哩飯C及排骨飯D

$$\left[\underbrace{C_1^2\times\frac{3!}{2!}}_{AAB或BBA}\times\underbrace{2!}_{\substack{A[C]A[D]B\\插空隙}}\right]+\left[\underbrace{C_1^2\times\frac{3!}{2!}}_{CCD或DDC}\times\underbrace{C_2^4\times2!}_{\substack{C[A]C[B]D\\插空隙}}-\underbrace{C_1^2\times2!}_{(CC)D或(DD)C}\times\underbrace{C_2^3\times2!}_{\substack{CC[A]D[B]\\插空隙}}\right]$$

$=[12]+[72-24]=60$

二、多選題（佔 30 分）

8. 設m、n爲小於或等於4的相異正整數且a、b爲非零實數。
已知函數$f(x)=ax^m$與函數$g(x)=bx^n$的圖形恰有3個相異交點，請選出可能的選項：
(1)m、n皆爲偶數且a、b同號 (2)m、n皆爲偶數且a、b異號
(3)m、n皆爲奇數且a、b同號 (4)m、n皆爲奇數且a、b異號
(5)m、n爲一奇一偶。 【106 學測】

答：(1)(3)

解：不失一般性，可假設$m>n$且m、n均爲小於或等於4的正整數

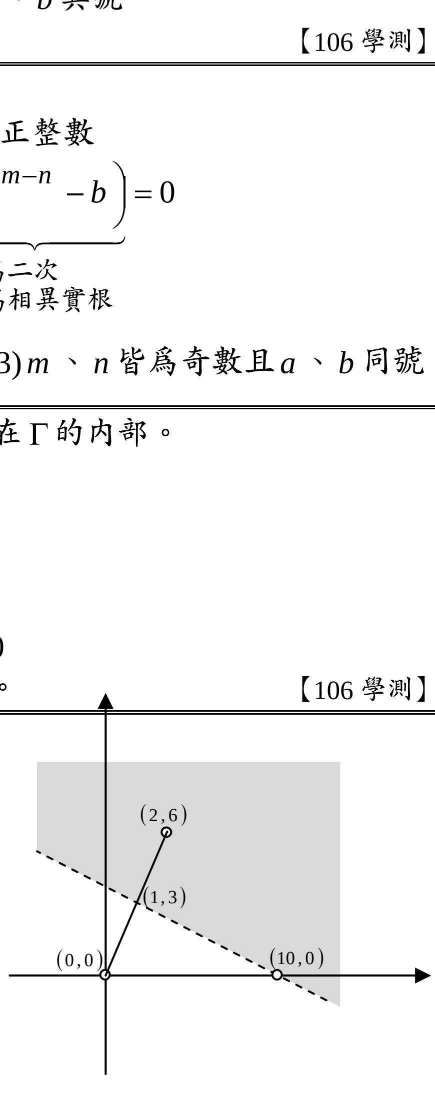
$f(x)=ax^m$與$g(x)=bx^n$恰有3個相異交點$\Rightarrow\underbrace{x^n}_{重根}\underbrace{\left(ax^{m-n}-b\right)}_{\substack{必爲二次\\且爲相異實根}}=0$

故$m-n=2$且$\frac{b}{a}>0\Rightarrow$(1)m、n皆爲偶數且a、b同號(3)m、n皆爲奇數且a、b同號

9. 設Γ爲坐標平面上的圓，點$(0,0)$在Γ的外部且點$(2,6)$在Γ的內部。
請選出正確的選項：
(1)Γ的圓心不可能在第二象限
(2)Γ的圓心可能在第三象限且此時Γ的半徑必定大於10
(3)Γ的圓心可能在第一象限且此時Γ的半徑必定小於10
(4)Γ的圓心可能在x軸上且此時圓心的x坐標必定小於10
(5)Γ的圓心可能在第四象限且此時Γ的半徑必定大於10。 【106 學測】

答：(5)

解：$(0,0)$與$(2,6)$之中垂線方程式爲$x+3y=10$，
因爲$(0,0)$在Γ外部，$(2,6)$在Γ內部，
故圓心在$x+3y=10$右側區域(不包含直線本身)，
如圖



(1)錯誤：由圖知，圓心可能在第二象限

(2)錯誤：由圖知，圓心不可能在第三象限

(3)錯誤：反例：$(x-6)^2+(y-15)^2=169$，此時半徑爲 13

(4)錯誤：如圖，若圓心在 x 軸上，則圓心之 x 座標必定大於 10

(5)正確：若圓心在第四象限，此時半徑必定大於 $(10,0)$ 與 $(2,6)$ 之距離 $(=10)$

10. 坐標空間中有三直線 L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$，$L_2$：$\begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$，

L_3：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 爲實數。請選出正確的選項：

(1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直　(2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直

(3)有一個平面同時包含 L_1 與 L_2　(4)有一個平面同時包含 L_1 與 L_3

(5)有一個平面同時包含 L_2 與 L_3。　【106 學測】

答：(2)(3)(4)

解：L_1：$\begin{cases} x=1+2s \\ y=-1+2s \\ z=s \end{cases}$、$L_2$：$\begin{cases} x=2+2m \\ y=3+2m \\ z=m \end{cases}$、$L_3$：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$

(1)方向向量 $(2,2,1)//(2,2,1)$，L_1 與 L_2 的方向向量互相平行

(2)方向向量 $(2,2,1)\perp(-1,-1,4)$，L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直

(3) $(1,-1,0)\in L_1$，但 $(1,-1,0)\notin L_2$，表 $L_1//L_2\Rightarrow$ 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2

(4) $\begin{cases} x=1+2s=-t \\ y=-1+2s=-2-t \\ z=s\qquad=4+4t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} s=0 \\ t=-1 \end{cases}$，表 L_1 與 L_3 相交 $\Rightarrow$ 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3

(5) $\begin{cases} x=2+2m=-t \\ y=3+2m=-2-t \\ z=m\qquad=4+4t \end{cases}$，無解，表 L_2 與 L_3 歪斜（不共平面）

11. 最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。
關於這五邊形，請選出正確的選項：

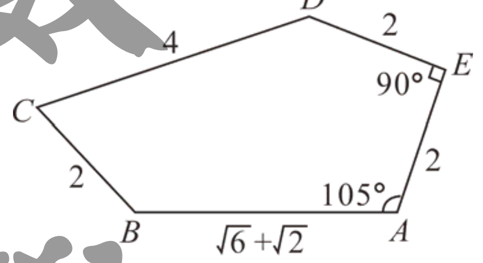
(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$

(2) $\angle DAB=45°$

(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$

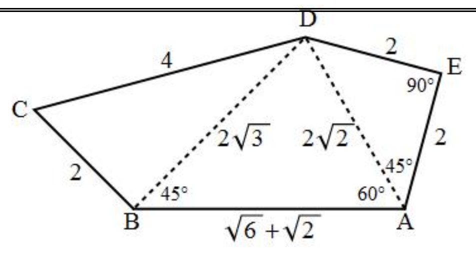
(4) $\angle ABD=45°$

(5) ΔBCD 的面積爲 $2\sqrt{2}$。



【106 學測】

答：(1)(4)



解：(1)正確：ΔADE 爲直角三角形，故 $\overline{AD}=2\sqrt{2}$

(2)錯誤：$\angle DAE=45°$，故 $\angle DAB=60°$

(3)錯誤：由餘弦定理知

$$\cos 60^\circ=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-\overline{BD}^2}{2\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}\text{，}\overline{BD}=2\sqrt{3}$$

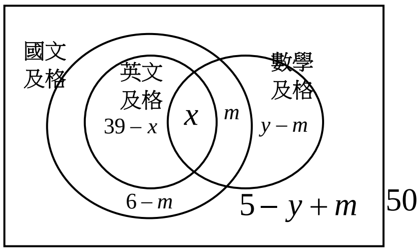
(4)正確：由正弦定理知 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\angle ADB}\Rightarrow\begin{cases}\angle ABD=45^\circ\\ \angle ADB=75^\circ\end{cases}$

(5)錯誤：ΔBCD 爲直角三角形，面積爲 $2\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

12. 某班級50位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別爲45、39、34人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項：
(1) $x+y=39$　(2) $y\le 11$　(3)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人
(4)三科中至少有一科不及格的學生最少有11人
(5)三科中至少有一科不及格的學生最多有27人。【106學測】

答：(2)(5)

解：依題意畫文氏圖如右：



則數學及格的人數 $x+y=34$

三科均不及格者有 $5-y+m$

故 $\begin{cases}x\ge 0\\ m\ge 0\\ 39-x\ge 0\\ 6-m\ge 0\\ y-m\ge 0\\ 5-y+m\ge 0\end{cases}\xrightarrow{y=34-x}\begin{cases}0\le x\le 39\\ 0\le m\le 6\\ 29\le x+m\le 34\end{cases}$

當 $m=0\Rightarrow 29\le x\le 34$，當 $m=6\Rightarrow 23\le x\le 28$，則 $23\le x\le 34$，

故 $16\le 50-x\le 21$，三科中至少有一科不及格 $(50-x)$：最少16人，最多27人

13. 空間中有一四面體 $ABCD$，假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項：
(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
(3)若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角　(4)若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
(5)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角。【106學測】

答：(3)(5)

解：(1)錯誤：應爲 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2)錯誤：$\angle BAC$ 爲直角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

代入(1)得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2>0\Rightarrow\angle BDC$ 爲銳角

(3)正確：$\angle BAC$ 爲銳角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，

代入(1)得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Rightarrow\angle BDC$ 爲銳角

(4)錯誤：$\angle BAC$ 爲鈍角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，

代入(1)得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 無法確定正負，無法確定 $\angle BDC$

(5)正確：$\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta<\overline{DA}^2$

代入(1)得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Rightarrow\angle BDC$ 爲銳角

第貳部分：選填題（佔 35 分）

A. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\ge 2$ 且 $f(x)$ 爲二次多項式。
若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=12$，則 $a_5=$________。 【106 學測】

答：25

解：因爲 $f(x)$ 爲二次多項式，可令 $f(x)=ax^2+bx+c$

由題意知 $\begin{cases}a_2=a_1+f(0)\\a_3=a_2+f(1)\\a_4=a_3+f(2)\\a_5=a_4+f(3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=c\\3=a+b+c\\7=4a+2b+c\\a_5-12=9a+3b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1\\b=1\\a=1\\a_5=25\end{cases}$

B. 在坐標平面上，ΔABC 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。
若 A，P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，則 $\overrightarrow{AM}=$________。(化爲最簡分數) 【106 學測】

答：$\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)$

解：$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{10}\left(\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{7}{10}\overrightarrow{AM}$，

故 $\overrightarrow{AM}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)=\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$

C. 若 a 爲正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，則 $a=$________。
【106 學測】

答：7

解：a 爲正整數，則無正根。

由牛頓定理，知可能的有理根爲 -1、$-\frac{1}{5}$

由韋達定理，知三根之積爲 $-\frac{1}{5}$，故三根必爲 -1、-1、$-\frac{1}{5}$，

則三根之和 $-\frac{11}{5}=-\frac{a+4}{5}\Rightarrow a=7$

D. 設 $a_1,a_2,\ldots,a_9$ 爲等差數列且 k 爲實數。若方程式有 $\begin{cases}a_1x-a_2y+2a_3z=k+1\\a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5\\a_7x-a_8y+2a_9z=k+9\end{cases}$ 有解，
則 $k=$________。 【106 學測】

答：-5

解：$\xrightarrow{a_k+a_{k+6}=2a_{k+3}}$ 原式：$(k+1)+(k+9)=2(-k-5)\Rightarrow k=-5$

E. 設a,b,x皆爲正整數且滿足$a \le x \le b$及$b-a=3$。若用內插法從$\log a$，$\log b$求得$\log x$的近似值爲$\log x \approx \frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}\left(1+2\log 3-\log 2\right)+\frac{2}{3}\left(4\log 2+\log 3\right)$，則$x$的值爲________。【106 學測】

答： 47

解：$\log x \approx \frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}\left(\log 45\right)+\frac{2}{3}\left(\log 48\right)$

$\xrightarrow{b-a=3} a=45, b=48 \Rightarrow x=\frac{a+2b}{3}=47$

F. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率爲________。(化爲最簡分數) 【106 學測】

答：$\frac{9}{64}$

解：$\dfrac{\underbrace{4!}_{\text{上下左右}}+\underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{\text{左左右右}}+\underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{\text{上上下下}}}{4^4}=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$

G. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑爲________公尺。【106 學測】

答：14.4

解：設甲、乙均從原點O出發，

t秒後甲位於$P(4t,0)$、乙位於$Q(0,3t)$，

此時兩人互望的視線開始被圓柱體建築物阻擋，

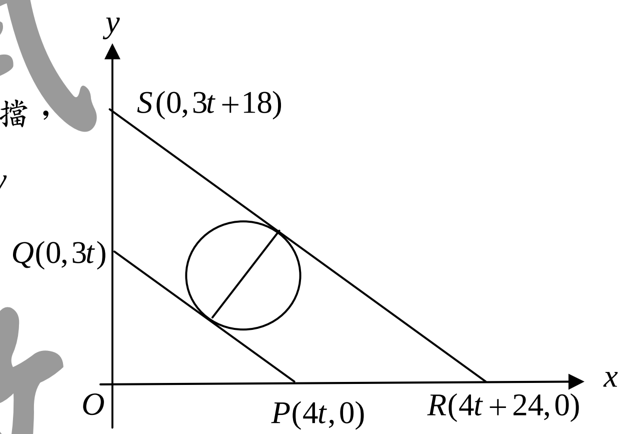
互望視線L_1：$\frac{x}{4t}+\frac{y}{3t}=1 \Rightarrow 3x+4y=12y$

再 6 秒後甲位於$R(4t+24,0)$、

乙位於$S(0,3t+18)$才又相見，

互望視線L_2：$\frac{x}{4t+24}+\frac{y}{3t+18}=1$

$\Rightarrow 3x+4y=12y+72$



則由右圖知所求之圓的直徑$=d\left(L_1,L_2\right)=\frac{72}{5}=14.4$