

107 年大學入學指定科目考試數學甲試題

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 設 A 為 3×3 矩陣，且對任意實數 a 、 b 、 c ， $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$ 均成立。

試問矩陣 $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 為何？ (1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

2. 坐標平面上，考慮 $A(2,3)$ 與 $B(-1,3)$ 兩點，並設 O 為原點。令 E 為滿足

$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1 \leq a \leq 1$ ， $0 \leq b \leq 4$ 。考慮函數 $f(x) = x^2 + 5$ ，試問當限定 x 為區域 E 中的點 $P(x, y)$ 的橫坐標時， $f(x)$ 的最大值為何？
(1) 5 (2) 9 (3) 30 (4) 41 (5) 54。

3. 某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A 、 B 、 C 三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A 、 B 、 C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，

試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何？(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{10}{23}$ (4) $\frac{10}{19}$ (5) $\frac{5}{9}$ 。

二、多選題（占 40 分）

4. 設 $f(x) = -x^2 + 499$ ，且 $A = \int_0^{10} f(x) dx$ 、 $B = \sum_{n=0}^9 f(n)$ 、 $C = \sum_{n=1}^{10} f(n)$ 、

$D = \sum_{n=0}^9 \frac{f(n) + f(n+1)}{2}$ ，試選出正確的選項：

(1) A 表示在坐標平面上函數 $y = -x^2 + 499$ 的圖形與直線 $y = 0$ 、 $x = 0$ 、 $x = 10$ 所圍成的有界區域的面積

(2) $B < C$ (3) $B < A$ (4) $C < D$ (5) $A < D$ 。

5. 坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y = \log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，

且 \overline{PQ} 的中點在 x 軸上，試選出正確的選項：

(1) L 的斜率大於 0 (2) $bd = -1$ (3) $ac = 1$

(4) L 的 y 截距大於 -1 (5) L 的 x 截距大於 1。

6. 坐標空間中，有 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 、 \vec{d} 四個向量，滿足外積 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且

\vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 的向量長度均為 4。設向量 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 θ （其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ ），試選出正確的選項。

(1) $\cos \theta = \frac{1}{4}$ (2) \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 所張出的平行六面體的體積為 16

(3) \vec{a} 、 \vec{c} 、 \vec{d} 兩兩互相垂直 (4) \vec{d} 的長度等於 4 (5) \vec{b} 與 \vec{d} 的夾角等於 θ 。

7. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A 、 B 分別代表複數 z_1 、 z_2 ，且滿足 $|z_1| = 2$ ， $|z_2| = 3$ ， $|z_2 - z_1| = \sqrt{5}$ 。若 $\frac{z_2}{z_1} = a + bi$ ，其中 a 、 b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ ，

試選出正確的選項：

- (1) $\cos \angle AOB = \frac{2}{3}$ (2) $|z_2 + z_1| = \sqrt{23}$ (3) $a > 0$ (4) $b > 0$
 (5) 設點 C 代表 $\frac{z_2}{z_1}$ ，則 $\angle BOC$ 可能等於 $\frac{\pi}{2}$ 。

8. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項：

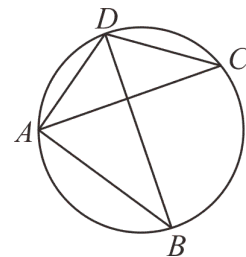
- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{|x|} \right)^2$ 存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{x}{|x|}$ 存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) \frac{x}{|x|}$ 存在
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^2$ 存在。

三、選填題 (占 18 分)

- A. 坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0, -5)$ ，其圓心在 $x = 2$ 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦長為 6，則其半徑為_____。(化為最簡根式)

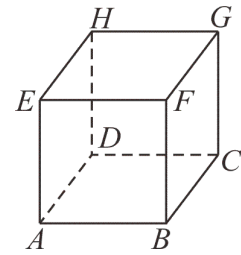
- B. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p (其中 $0 < p < 1$)，且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X = k)$ 。已知 $p_4 + p_5 = \frac{45}{8} p_6$ ，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值_____。(化為最簡分數)

- C. 設 A, B, C, D 為圓上的相異四點。已知圓的半徑為 $\frac{7}{2}$ ， $\overline{AB} = 5$ ，兩線段 \overline{AC} 與 \overline{BD} 互相垂直，如圖所示(此為示意圖，非依實際比例)。則 \overline{CD} 的長度為_____。(化為最簡根式)。



第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一. 坐標空間中有一正立方體 $ABCDEFGH$ ，如圖所示(此為示意圖)，試回答下列問題。



(1) 試證明 A 點到平面 BDE 的距離是對角線 AG 長度的三分之一。(4 分)

(2) 試證明向量 \overrightarrow{AG} 與平面 BDE 垂直。(2 分)

(3) 如果知道平面 BDE 的方程式為 $2x + 2y - z = -7$ ，且

A 點坐標為 $(2, 2, 6)$ ，試求出 A 點到平面 BDE 的距離。(2 分)

(4) 承(3)，試求出 G 點的坐標。(4 分)

二. 考慮三次多項式 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ ，試回答下列問題。

(1) 坐標平面上，試描繪 $y = f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。(4 分)

(2) 令 $f(x) = 0$ 的實根為 a_1, a_2, a_3 ，其中 $a_1 < a_2 < a_3$ 。試求 a_1, a_2, a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。(2 分)

(3) 承(2)，試說明 $f(x) = a_1$ 、 $f(x) = a_2$ 、 $f(x) = a_3$ 各有幾個相異實根。(4 分)

(4) 試求 $f(f(x)) = 0$ 有幾個相異實根(註： $f(f(x)) = -(f(x))^3 - 3(f(x))^2 + 3$)。(2 分)

2018年指定科目考試數學甲試題 參考答案

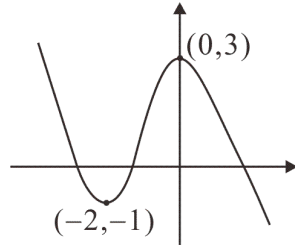
選擇題：1.(2) 2.(4) 3.(3) 4.(1)(4) 5.(1)(3)(5) 6.(2)(3) 7.(1)(3)(5) 8.(1)(2)(5)

選填題：A. $\sqrt{13}$ B. $\frac{18}{5}$ C. $2\sqrt{6}$

非選擇題：一. (1)略 (2)略 (3) 3 (4) $(-4, -4, 9)$

二. (1)

(2) $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(0, 1)$



(3) 一實根，一實根，三相異實根

(4) 五相異實根