108 年大學入學指定科目考試數學甲試題

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？
   (1) 850 元　(2) 875 元　(3) 900 元　(4) 925 元　(5) 950 元

2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數（Fermat Number）定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$，例如 $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$，$F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$。試問 $\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？（log2≈0.3010）
   (1) 120　(2) 240　(3) 600　(4) 900　(5) 1200

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A，測得塔頂的仰角為 14°；又在此尖塔正東方地面某點 B，測得塔頂的仰角為 18°30'，且 A、B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？（cot14°≈4.01，cot18°30'≈2.99）
   (1) 27 公尺　(2) 29 公尺　(3) 31 公尺　(4) 33 公尺　(5) 35 公尺

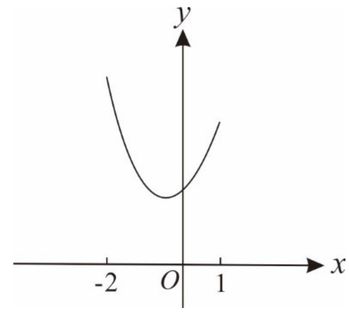
二、多選題（占 40 分）

4. 設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。
   (1) Γ 的半徑大於或等於 5　(2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時，Γ 通過原點
   (3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點　(4) Γ 的圓心不可能在第四象限
   (5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8

5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。
   (1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
   (2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
   (3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
   (4)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
   (5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率

6. 設 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n，$a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$，試選出正確的選項。
   (1) 對所有的正整數 n，$a_n > 3$ 均成立　(2) 存在正整數 n，使得 $a_{n+1} > 4$
   (3) 對所有的正整數 n，$b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = 4$
   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$

7. 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在 $-2\le x\le 1$ 範圍內的圖形如示意圖：試選出正確的選項。



(1) $a>0$
(2) $b>0$
(3) $c>0$
(4) 方程式 $f(x)=0$ 恰有三實根
(5) $y=f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正

8. 坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A、B、C 滿足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中 A 點的坐標為 $(1,0)$。試選出正確的選項。

(1) 向量 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4　(2) 內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$
(3) $\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小
(4) $\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$　(5) $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

三、選填題（占 18 分）

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標，$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，則 $(r,s)=$＿＿＿＿＿。

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$、$B(b,s)$ 為函數圖形 $y=\log_2 x$ 上之兩點，其中 $a<b$。已知 A、B 連線的斜率等於 2，且線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$，則 $(a,b)=$＿＿＿＿＿。（化成最簡分數）

C. 設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z、0、$z+5-2\sqrt{3}i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），則 z 的實部為＿＿＿＿＿。（化成最簡分數）

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一. 坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量 $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$ 、 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$ 。

試回答下列問題。

(1) 若 $\overrightarrow{OP}$ 是長度為 2 的向量，且與 $\overrightarrow{OA}$ 之夾角為 60° ，試求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的內積。(2 分)

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一平面 E 上，試求平面 E 的方程式。(2 分)

(3) 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，分別與 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 之夾角皆為 60°，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量。(4 分)

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標。(4 分)

二. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。

試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$ 。(2 分)

(2) 試求 $f'(x)$ 。(4 分)

(3) 試求 $f(x)$ 。(2 分)

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$ 。(4 分)

2019年指定科目考試數學甲試題 參考答案

選擇題：**1.**(2)　**2.**(5)　**3.**(3)　**4.**(2)(5)　**5.**(1)(5)　**6.**(3)(4)　**7.**(2)(3)(5)　**8.**(1)(5)

選填題：**A.** $(3,-1)$　**B.** $(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$　**C.** $-\frac{7}{2}$

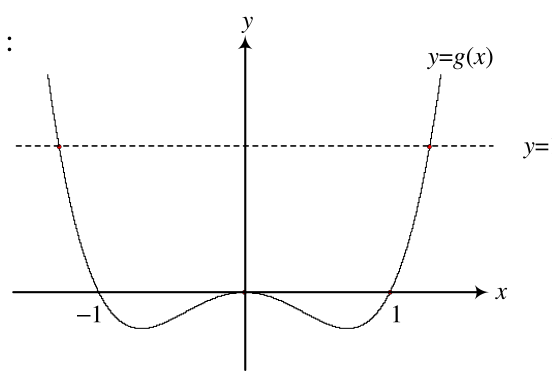
非選擇題：一. (1) 2　(2) $x+\sqrt{2}y+z=2$　(3) $(0,1,-\sqrt{2})$　(4) $(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3})$，$(1,\sqrt{2},-1)$

二. (1) 2　(2) $f'(x)=12x^2-6x+2$　(3) $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

(4) 證明

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a(4x^3-3x^2+2x-1)dx=x^4-x^3+x^2-x\Big|_0^a=a^2(a+1)(a-1)$$

令 $g(a)=\int_0^a f(x)dx=a^2(a+1)(a-1)$，如圖：



則滿足 $g(a)=1$ 之 a 有兩解，
分別是大於1及小於 -1
故恰有一個大於1的正實數 a
滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$，得證。