# 108 年大學入學學力測驗數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（佔 65 分）

一、單選題（佔 30 分）

1. 點 $A(1,0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 上。試問：$\Gamma$ 上除了 $A$ 點以外，還有幾個點到直線 $L: y=2x$ 的距離，等於 $A$ 點到 $L$ 的距離？
(1)1個　(2)2個　(3)3個　(4)4個　(5)0個　【108 年學測】

答：(3)

解：$\because d(A,L)=d((1,0),2x-y=0)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}<r=1$

$\therefore$ 圓上另有 3 點到 $2x-y=0$ 的距離 $=d(A,L)$

2. 下列哪一個選項是方程式 $x^3-x^2+4x-4=0$ 的解？(註：$i=\sqrt{-1}$)
(1)$-2i$　(2)$-i$　(3)$i$　(4)2　(5)4　【108 年學測】

答：(1)

解：原式 $=(x-1)(x^2+4)=0 \quad \Rightarrow x=1,\pm 2i$

3. 試問共有多少組正整數 $(k,m,n)$ 滿足 $2^k 4^m 8^n=512$？
(1)1組　(2)2組　(3)3組　(4)4組　(5)0組　【108 年學測】

答：(3)

解：$2^{k+2m+3n}=2^9$，$k,m,n\in N$

$(k,m,n)=(1,1,2)$、$(2,2,1)$、$(4,1,1)$ 共三組

4. 廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材做三道菜，每道菜可以只用一種食材或多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？
(1)3　(2)6　(3)9　(4)18　(5)27。　【108 年學測】

答：(5)

解：$\because$ 每菜中必有一肉　$\therefore$ 只考慮素的分配

$$\Rightarrow \underbrace{3}_{(3,0,0)}+\underbrace{C^3_2C^1_1\times 3!}_{(2,1,0)}+\underbrace{3!}_{(1,1,1)}=3+18+6=27$$

5. 設正實數 $b$ 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$，試選出正確的選項：
(1)$1\le b\le\sqrt{10}$　(2)$\sqrt{10}\le b\le 10$　(3)$10\le b\le 10\sqrt{10}$
(4)$10\sqrt{10}\le b\le 100$　(5)$100\le b\le 100\sqrt{10}$。　【108 年學測】

答：(4)

解：原式：$2\log b+2+\log b=7\Rightarrow \log b=\dfrac{5}{3}\quad \therefore 10\sqrt{10}\le b\le 100$

6. 某超商依據過去的銷售紀錄，冬天平均氣溫在 $6°C$ 到 $24°C$ 時，每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關係數爲 $-0.99$，部分紀錄如下表。

| 平均氣溫（℃） | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均售出量（杯） | 512 | 437 | 361 | 279 | 203 | 135 |

某日平均氣溫爲 $8°C$，依據上述資訊推測，試問該日賣出的咖啡數量應接近下列哪個選項？

(1) 570 杯　(2) 625 杯　(3) 700 杯　(4) 755 杯　(5) 800 杯。　【108 年學測】

答：(2)

解：∵相關係數 $\fallingdotseq -1$　∴數據幾乎共線

斜率 $=\dfrac{y-512}{8-11}=\dfrac{135-512}{21-11}\Rightarrow y\fallingdotseq 625.1\cdots\cdots$

二、多選題（佔 35 分）

7. 設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 之公差爲正實數 $\alpha$，試選出正確的選項：

(1)若 $b_n=-a_n$，則 $b_1>b_2>b_3>\cdots\cdots$

(2)若 $c_n=a_n^2$，則 $c_1<c_2<c_3<\cdots\cdots$

(3)若 $d_n=a_n+a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots$ 是公差爲 $\alpha$ 的等差數列

(4)若 $e_n=a_n+n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots\cdots$ 是公差爲 $\alpha+1$ 的等差數列

(5)若 $f_n$ 爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots$ 是公差爲 $\alpha$ 的等差數列。

【108 年學測】

答：(1)(4)

解：(1) $\alpha>0$　$\therefore a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots$　$\therefore -a_1>-a_2>-a_3>\cdots\cdots$

(2)不一定（反例：$a_1=-3$，$a_2=1$，$a_3=5$，……）

(3) $d_{n+1}-d_n=\lfloor a_n+a_{n+1}\rfloor-\lfloor a_{n-1}+a_n\rfloor=2\alpha$

(4) $e_{n+1}-e_n=\lfloor a_{n+1}+(n+1)\rfloor-\lfloor a_n+n\rfloor=\alpha+1$

(5)應爲 $\dfrac{\alpha}{2}$

8. 在數線上，甲從點 $-8$ 開始做等速運動，同時乙也從點 10 開始做等速運動，乙移動的速率是甲的 $a$ 倍，且 $a>1$，試選出正確的選項：

(1)若甲朝負向移動而乙朝正向移動，則他們會相遇

(2)若甲朝負向移動且乙朝負向移動，則他們不會相遇

(3)若甲朝正向移動而乙朝負向移動，則乙先到達原點 0

(4)若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會越來越大

(5)若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點 $-2$ 相遇，則 $a=2$。　【108 年學測】

答：(4)(5)

解：(1) 永不相遇　(2) $|(-8-t)-(10-at)|=0\Rightarrow t=\dfrac{18}{a-1}$ 可成立

(3) 不一定　(4)正確　(5) $\begin{cases}-8+t=-2\\10-at=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=6\\a=2\end{cases}$

9. 從1，2，3，4，5，6，7這七個數字中隨機任取兩數，試選出正確的選項：

(1)其和大於10的機率爲$\frac{1}{7}$　(2)其和小於5的機率爲$\frac{1}{7}$　(3)其和爲奇數的機率爲$\frac{4}{7}$

(4)其差爲偶數的機率爲$\frac{5}{7}$　(5)其積爲奇數的機率爲$\frac{2}{7}$。　【108 年學測】

答：(3)(5)

解：(1)$\frac{1+2+1}{C_2^7}=\frac{4}{21}$　(2)$\frac{2}{C_2^7}=\frac{2}{21}$　(3)$\frac{C_1^4C_1^3}{C_2^7}=\frac{4}{7}$

(4)$\frac{C_2^4C_2^3}{C_2^7}=\frac{3}{7}$　(5)$\frac{C_2^4}{C_2^7}=\frac{2}{7}$

10. 在$\Delta ABC$中，已知$50°\le\angle A<\angle B\le 60°$，試選出正確的選項：

(1)$\sin A<\sin B$　(2)$\sin B<\sin C$　(3)$\cos A<\cos B$　(4)$\sin C<\cos C$　(5)$\overline{AB}<\overline{BC}$。

【108 年學測】

答：(1)(2)

解：$50°\le\angle A<\angle B\le 60°\quad\Rightarrow 60°<\angle C<80°$

(1)(2)$\sin A<\sin B<\sin C$　(3)$\cos A>\cos B$

(4)$\sin C>\cos C$　(5)$\overline{AB}=c>a=\overline{BC}$

11. 某地區衛生機構成功訪問了500人，其中年齡爲50－59歲及60歲（含）以上者分別有220名及280名。這500名受訪者中，120名曾做過大腸癌篩檢，其中有75名是在一年之前做的，有45名是在一年之內做的。已知受訪者中，60歲（含）以上者曾做過大腸癌篩檢比率是50－59歲者曾做過大腸癌篩檢比率的3.5倍，試選出正確的選項：

(1)受訪者中年齡爲60歲（含）以上者超過60%

(2)由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在50－59歲間的機率大於0.25

(3)由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率爲$2\cdot\left(\frac{45}{120}\right)\left(\frac{75}{119}\right)$

(4)這500名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於75%

(5)受訪者中60歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過90名。　【108 年學測】

答：(3)(5)

解：(1)$\frac{280}{500}=56\%$　(2)$\frac{C_2^{220}}{C_2^{500}}\fallingdotseq 0.19<0.25$　(3)$\frac{C_1^{75}C_1^{45}}{C_2^{120}}=\frac{2\times75\times45}{120\times119}$

(4)$\frac{380}{500}=76\%$　(5)$\frac{\frac{x}{280}}{\frac{120-x}{220}}=3.5\Rightarrow x\fallingdotseq 95$

12. 設$f_1(x)$，$f_2(x)$爲實係數三次多項式，$g(x)$爲實係數二次多項式。

已知$f_1(x)$，$f_2(x)$除以$g(x)$的餘式分別爲$r_1(x)$，$r_2(x)$，試選出正確的選項：

(1) $-f_1(x)$除以$g(x)$的餘式爲$-r_1(x)$

(2) $f_1(x)+f_2(x)$除以$g(x)$的餘式爲$r_1(x)+r_2(x)$

(3) $f_1(x)f_2(x)$除以$g(x)$的餘式爲$r_1(x)r_2(x)$

(4) $f_1(x)$除以$-3g(x)$的餘式爲$\frac{-1}{3}r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$可被$g(x)$整除。 【108 學測】

答：(1)(2)(5)

解：(3)不一定　(4)應爲$r_1(x)$

13. 坐標空間中有一平面$P$過$(0,0,0)$，$(1,2,3)$及$(-1,2,3)$三點，試選出正確的選項：

(1)向量$(0,3,2)$與平面$P$垂直　(2)平面$P$與$xy$平面垂直

(3)點$(0,4,6)$在平面$P$上　(4)平面$P$包含$x$軸

(5)點$(1,1,1)$到平面$P$的距離是1。 【108 學測】

答：(3)(4)

解：$O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$

(1) $\overrightarrow{P}\,//\,\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(0,-6,4)=-2(0,3,-2)$

(2) $\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{z}=(0,3,-2)\cdot(0,0,1)=-2\neq 0$

(3) $P=3y-2z=0$，含點$(0,4,6)$

(4) $x$軸$(t,0,0)\in P$

(5)距離應爲$\frac{1}{\sqrt{13}}$

第貳部分：選擇題（佔 35 分）

A. 設$x$、$y$爲實數，且滿足$\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -6\end{bmatrix}$，則$x+3y=$_____。【108 學測】

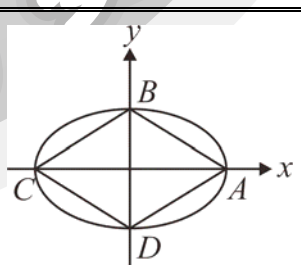
答：$-4$

解：$\begin{cases}3x-y+3=6\\ 2x+4y-1=-6\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{-3}{2}$

B. 如圖(此爲示意圖)，$A,B,C,D$是橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$的頂點。

若四邊形$ABCD$的面積爲58，則$a=$_____。

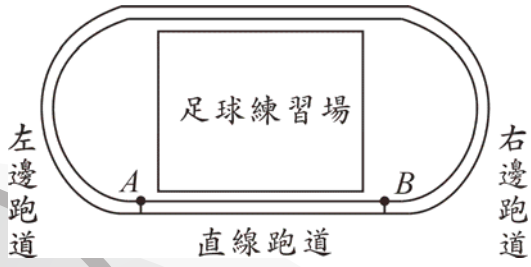
(化爲最簡分數) 【108 學測】




答：$\frac{29}{4}$

解：$\frac{(2b)\times(2a)}{2}=58\Rightarrow\frac{(8)\times(2a)}{2}=58\Rightarrow a=\frac{29}{4}$

C. 某高中已有一個長90公尺、寬60公尺的足球練習場。若想要在足球練習場的外圍鋪設內圈總長度爲400公尺的跑道，跑道規格爲左右兩側各是直徑相同的半圓，而中間是上下各一條的直線跑道，直線跑道和足球練習場的長邊平行(如示意圖)。則圖中一條直線跑道 $\overline{AB}$ 長度的最大可能整數值爲_____公尺。【108 學測】



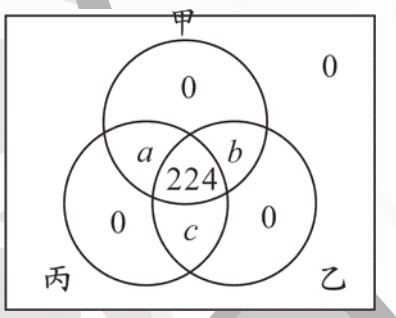

答：105

解：$\underbrace{2y\pi}_{\text{弧長}}+\underbrace{2x}_{2\overline{AB}}=400\xrightarrow{y=30}x\fallingdotseq 105.7\cdots\cdots$

D. 某次選舉中進行甲、乙、丙三項公投，每項公投案一張選票，投票人可選擇領或不領。投票結束後清點某投票所的選票，發現甲案有765人領票，乙案有537人領票，丙案有648人領票，同時領甲、乙、丙三案公投票的有224人，並且每個人都至少領了兩張公投票。根據以上資訊，可知同時領甲、乙兩案但沒有領丙案公投票者共有_____人。【108 學測】

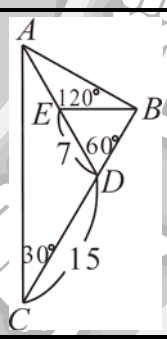
答：215

解：



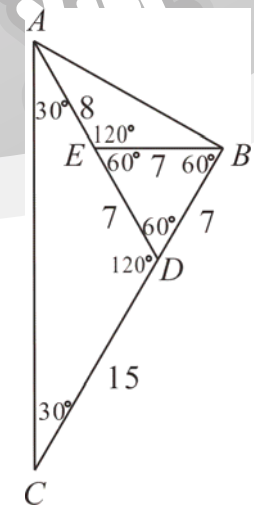

$$\begin{cases}a+b+224=765\\b+c+224=537\\c+a+224=648\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=326\\b=215\\c=98\end{cases}\qquad \text{所求}=b=215$$

E. 如圖（此爲示意圖），在 $\Delta ABC$ 中，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 $E$ 點，且 $\angle ACB=30^\circ$，$\angle EDB=60^\circ$，$\angle AEB=120^\circ$，若 $\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則 $\overline{AB}=$_____。【108 學測】




答：13

解：$\overline{AB}=\sqrt{7^2+8^2-2\times7\times8\times\cos120^\circ}$
$=13$

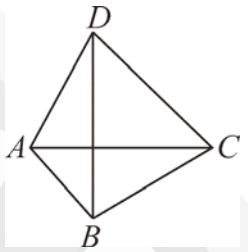


F. 坐標空間中，考慮有一個頂點在平面 $z=0$ 上、且有另一個頂點在平面 $z=6$ 上的正立方體。則滿足前述條件的正立方體之邊長最小可能值爲_____。（化成最簡根式）【108 學測】

答：$2\sqrt{3}$

解：當 $d\left(z=0,z=6\right)=\sqrt{3}$ 邊長，亦即邊長 $=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ （最小）

G. 如圖（此爲示意圖），$A$、$B$、$C$、$D$ 爲平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$_____。【108 學測】




答：$-3$

解：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

因爲 $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BD}\right|^2$，故 $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right|^2$

所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ ……(1)

因爲 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=0$

所以 $-2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ ……(2)

由(1)(2)得知：$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}\left|\overrightarrow{AB}\right|$

則 $\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\tan\angle BAD=-3$