109 學年度指定科目考試數學甲

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 已知 $45° < \theta < 50°$ ，且設 $a = 1 - \cos^2\theta$ 、 $b = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$ 、 $c = \dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 1}$ 。
關於 a 、 b 、 c 三個數值的大小，試選出正確的選項。
(1) $a < b < c$ (2) $a < c < b$ (3) $b < a < c$ (4) $b < c < a$ (5) $c < a < b$ 。

2. 有 A 、 B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球， B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：
（一）先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；
（二）先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；
（三）同時分別在 A 、 B 箱中各抽取一球。
給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1 、 E_2 、 E_3 ，試選出正確的選項。
(1) $E_1 > E_2 > E_3$ (2) $E_1 = E_2 > E_3$ (3) $E_2 = E_3 > E_1$
(4) $E_1 = E_3 > E_2$ (5) $E_3 > E_2 > E_1$ 。

3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每 3.5 小時會擴增為 2.4 倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌 1000 隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達 4×10^{10} 隻左右？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）
(1) 63 小時 (2) 70 小時 (3) 77 小時 (4) 84 小時 (5) 91 小時。

二、多選題（占 40 分）

4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1 ， C_2 ， C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ， $n = 1$ ， 2 ， 3 ，試選出正確的選項。
(1) $\overrightarrow{OC_1} \neq \vec{0}$ (2) $\overline{OC_1} < \overline{OC_2} < \overline{OC_3}$ (3) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$
(4) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$ (5) C_1 ， C_2 ， C_3 在同一直線上。

5. 對一實數 a ，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如： $[1.2] = [\sqrt{2}] = 1$ ， $[-1.2] = -2$ 。考慮無理數 $\theta = \sqrt{10001}$ ，試選出正確的選項。
(1) $a - 1 < [a] \le a$ 對任意實數 a 均成立 (2)數列 $b_n = \dfrac{[n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數
(3)數列 $c_n = \dfrac{[-n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數 (4)數列 $d_n = n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$ 發散， n 為正整數
(5)數列 $e_n = n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$ 發散， n 為正整數。

6. 設$F(x)$、$f(x)$皆為實係數多項式函數。已知$F'(x)=f(x)$，試選出正確的選項。

(1)若$a\geq 0$，則$F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)dt$

(2)若$F(x)$除以x的商式為$Q(x)$，則$Q(0)=f(0)$

(3)若$f(x)$可被$x+1$整除，則$F(x)-F(0)$可被$(x+1)^2$整除

(4)若對所有實數x，$F(x)\geq \dfrac{x^2}{2}$都成立，則對所有實數x，$f(x)\geq x$也都成立

(5)若對所有$x>0$，$f(x)\geq x$都成立，則對所有$x>0$，$F(x)\geq \dfrac{x^2}{2}$也都成立。

7. 在複數平面上，設O為原點，且A、B分別表示坐標為複數z、$z+1$的點。 已知點A、點B都在以O為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。

(1)直線AB與實數軸平行 (2)ΔOAB為直角三角形 (3)點A在第二象限

(4)$z^3=1$ (5)坐標為$1+\dfrac{1}{z}$的點也在同一單位圓上。

8. 設二階實係數方陣A代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足$A^3=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$；

另設二階實係數方陣B代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足

$B^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1)A恰有三種可能 (2)B恰有三種可能 (3)$AB=BA$

(4)二階方陣AB代表坐標平面的一個旋轉變換 (5)$BABA=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

三、選填題（占 18 分）

A. 在坐標空間中，設O為原點，且點P為三平面$x-3y-5z=0$、$x-3y+2z=0$、$x+y=t$的交點，其中$t>0$。若$\overline{OP}=10$，則$t=$________。(化為最簡根式)

B. 考慮坐標平面上相異三點A、B、C，其中A點為$(1,1)$。分別以線段$\overline{AB}$、$\overline{AC}$為直徑作圓，此兩圓交於點A及點$P(4,2)$。已知$\overline{PB}=3\sqrt{10}$且點B在第四象限，則點B的坐標為________。

C. 在一個三角形公園，其三頂點O、A、B，在頂點O處有一座150公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點A、B與$\overline{AB}$的中點C，測得其俯角分別為$30°$、$60°$、$45°$。則此三角形公園的面積為________平方公尺。(化為最簡根式)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一. 在坐標平面上，由A、B、C、D四點所決定的「貝茲曲線」(Bézier curve)指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過A,D兩點，且在點A的切線通過點B，在點D的切線通過點C。令$y=f(x)$是由$A(0,0)$、$B(1,4)$、$C(3,2)$、$D(4,0)$四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

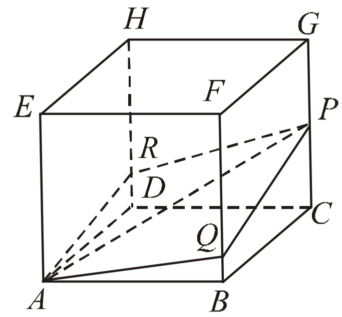
(1) 設$y=f(x)$的圖形在點D的切線方程式為$y=ax+b$，其中a,b為實數。求a,b之值。(2 分)

(2) 試證明多項式$f(x)$可以被x^2-4x所整除。(2 分)

(3) 試求$f(x)$。(4 分)

(4) 求定積分$\int_2^6 |8f(x)|\,dx$之值。(4 分)

二. 在一個邊長為 1 的正立方體$ABCD-EFGH$，點P為稜邊$\overline{CG}$的中點，點Q、R分別在稜邊$\overline{BF}$、$\overline{DH}$上，且A,Q,P,R為一平行四邊形的四個頂點，如圖所示。今設定坐標系，使得D、A、C、H的坐標分別為$(0,0,0)$、$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$，且$\overline{BQ}=t$，試回答下列問題。



(1)試求點P的坐標。(2 分)

(2)試求向量$\overrightarrow{AR}$（以t的式子來表示）。(2 分)

(3)試證明四角錐$G-AQPR$的體積是一個定值（與t無關），並求此定值。(4 分)

(4)當$t=\frac{1}{4}$時，求點G到平行四邊形$AQPR$所在平面的距離。(4 分)

2020年指定科目考試數學甲　參考答案

選擇題：**1.**(5)　**2.**(3)　**3.**(2)　**4.**(4)(5)　**5.**(1)(5)　**6.**(1)(2)　**7.**(1)(4)(5)　**8.**(2)(5)

選填題：**A.** $4\sqrt{10}$　**B.** $(7,-7)$　**C.** $7500\sqrt{2}$

非選擇題：一**.** (1) $(-2,8)$　(2) 略　(3) $f(x)=\frac{1}{8}(x^3-12x^2+32x)$　(4) 56

二**.** (1) $(0,1,\frac{1}{2})$　(2) $(-1,0,\frac{1}{2}-t)$　(3) 略　(4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$