

大學入學考試中心

109 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 已知 $45^\circ < \theta < 50^\circ$ ，且設 $a = 1 - \cos^2 \theta$ 、 $b = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$ 、 $c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$ 。

關於 a 、 b 、 c 三個數值的大小，試選出正確的選項。

(1) $a < b < c$ (2) $a < c < b$ (3) $b < a < c$ (4) $b < c < a$ (5) $c < a < b$ 。 【109 數甲】

答：(5)

解：∵ $45^\circ < \theta < 50^\circ$ ∴ $1 < \tan \theta < \sqrt{3}$ 且 $\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} < \frac{1}{2} < a = 1 - \cos^2 \theta < b = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

2. 有 A 、 B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球， B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：

- (一) 先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；
- (二) 先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；
- (三) 同時分別在 A 、 B 箱中各抽取一球。

給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1 、 E_2 、 E_3 ，試選出正確的選項。

- (1) $E_1 > E_2 > E_3$ (2) $E_1 = E_2 > E_3$ (3) $E_2 = E_3 > E_1$ (4) $E_1 = E_3 > E_2$
 (5) $E_3 > E_2 > E_1$ 。 【109 數甲】

答：(3)

解：

	A	紅	白白	白藍	} $E_1 = 50 \times \frac{4}{10} + 0 \times \frac{48}{100} + 100 \times \frac{12}{100} = 32$
P	4	6	$\frac{8}{10}$	$\frac{6}{10} \times \frac{2}{10}$	
\$	50	0	100		

	A	藍	白白	白紅	} $E_2 = 100 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{48}{100} + 50 \times \frac{32}{100} = 36$
P	2	8	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10} \times \frac{4}{10}$	
\$	100	0	50		

A	白白	白藍	紅白	紅藍	$E_3 = 0 \times \frac{48}{100} + 100 \times \frac{12}{100}$ $+ 50 \times \frac{32}{100} + 100 \times \frac{8}{100}$ $= 36$
P	$\frac{6}{10} \times \frac{8}{10}$	$\frac{6}{10} \times \frac{2}{10}$	$\frac{4}{10} \times \frac{8}{10}$	$\frac{4}{10} \times \frac{2}{10}$	
$\$$	0	100	50	100	

3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每3.5小時會擴增為2.4倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌1000隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達 4×10^{10} 隻左右？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）
 (1) 63小時 (2) 70小時 (3) 77小時 (4) 84小時 (5) 91小時。 【109 數甲】

答：(2)

解： $4 \times 10^{10} = 1000 \times (2.4)^{\frac{T}{3.5}} \Rightarrow \left(\frac{24}{10}\right)^{\frac{T}{3.5}} = 4 \times 10^7$
 $\Rightarrow \frac{T}{3.5} (\log 2^3 + \log 3 - \log 10) = \log 2^2 + \log 10^7$
 $\Rightarrow T \doteq \frac{2 \times 0.3010 + 7}{3 \times 0.3010 + 0.4771 - 1} \times 3.5 \doteq 70$

二、多選題 (佔 40 分)

4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1, C_2, C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC}_n = \overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ， $n=1, 2, 3$ ，試選出正確的選項。
 (1) $\overrightarrow{OC}_1 \neq \vec{0}$
 (2) $\overline{OC}_1 < \overline{OC}_2 < \overline{OC}_3$
 (3) $\overrightarrow{OC}_1 \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC}_2 \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC}_3 \cdot \overrightarrow{OA}$
 (4) $\overrightarrow{OC}_1 \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC}_2 \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC}_3 \cdot \overrightarrow{OB}$
 (5) C_1, C_2, C_3 在同一直線上。 【109 數甲】

答：(4)(5)

- 解：(1) 當 $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ 時， $\overrightarrow{OC}_1 = \vec{0}$
 (2) 反例， $\overrightarrow{OA} = (3, 0)$ ， $\overrightarrow{OB} = (-1, 0)$
 (3) 當 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 時， $\overrightarrow{OC}_1 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}_2 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}_3 \cdot \overrightarrow{OA}$
 當 $\angle AOB$ 為鈍角， $\overrightarrow{OC}_1 \cdot \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OC}_2 \cdot \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OC}_3 \cdot \overrightarrow{OA}$
 (4) 正確
 (5) 正確

5. 對一實數 a ，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如： $[1.2] = [\sqrt{2}] = 1$ ， $[-1.2] = -2$ 。考慮無理數 $\theta = \sqrt{10001}$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a-1 < [a] \leq a$ 對任意實數 a 均成立 (2) 數列 $b_n = \frac{[n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數
- (3) 數列 $c_n = \frac{[-n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數 (4) 數列 $d_n = n \left[\frac{\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數
- (5) 數列 $e_n = n \left[\frac{-\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數。

【109 數甲】

答：(1)(5)

解：(1) 正確

$$(2) n\theta - 1 < [n\theta] \leq n\theta \Rightarrow \theta - \frac{1}{n} < \frac{[n\theta]}{n} \leq \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\theta - \frac{1}{n} \right) = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \theta, \quad b_n \text{ 收斂}$$

$$(3) -n\theta - 1 < [-n\theta] \leq -n\theta \Rightarrow -\theta - \frac{1}{n} < \frac{[-n\theta]}{n} \leq -\theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\theta - \frac{1}{n} \right) = -\theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-\theta) = -\theta, \quad c_n \text{ 收斂}$$

$$(4) \text{當 } n > \theta = \sqrt{10001} \text{ 時, } \left[\frac{\theta}{n} \right] = 0 \Rightarrow n \left[\frac{\theta}{n} \right] = 0, \text{ 收斂}$$

$$(5) \text{當 } n > \theta = \sqrt{10001} \text{ 時, } \left[\frac{-\theta}{n} \right] = -1 \Rightarrow n \left[\frac{-\theta}{n} \right] = -n, \text{ 發散}$$

6. 設 $F(x)$ 、 $f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x) = f(x)$ ，試選出正確的選項。

(1) 若 $a \geq 0$ ，則 $F(a) - F(0) = \int_0^a f(t) dt$

(2) 若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0) = f(0)$

(3) 若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x) - F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除

(4) 若對所有實數 x ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x ， $f(x) \geq x$ 也都成立

(5) 若對所有 $x > 0$ ， $f(x) \geq x$ 都成立，則對所有 $x > 0$ ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 也都成立。

【109 數甲】

答：(1)(2)

解：(1) 正確

(2) 正確： $F(x) = xQ(x) + r \Rightarrow F'(x) = f(x) = xQ'(x) + Q(x) + 0 \Rightarrow f(0) = Q(0)$

(3) 反例： $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x+1 \\ F(x) - F(0) = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$

(4) 反例： $F(x) = x^4 + x^2 \geq \frac{x^2}{2}$ 恆成立，

但 $f(x) = 4x^3 + 2x \geq x$ ，在 $x < 0$ 時不成立

(5)反例： $F(x) = x^2 - 2 \geq \frac{x^2}{2}$ ，在 $0 < x < 2$ 不成立，
但 $f(x) = 2x \geq x$ 對所有 $x > 0$ 都成立

7. 在複數平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 分別表示坐標為複數 z 、 $z+1$ 的點。
 已知點 A 、點 B 都在以 O 為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。
 (1) 直線 AB 與實數軸平行 (2) $\triangle OAB$ 為直角三角形 (3) 點 A 在第二象限
 (4) $z^3 = 1$ (5) 坐標為 $1 + \frac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上。

【109 數甲】

答：(1)(4)(5)

解： $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(1) \overleftrightarrow{AB} 與 x 軸（實數軸）平行

(2) $\triangle OAB$ 為正 \triangle

(3) $A \in$ 第二或第三象限

(4) 正確

(5) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z} = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ， $1 + \frac{1}{z} = 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ；

另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足

$B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。

(1) A 恰有三種可能 (2) B 恰有三種可能 (3) $AB = BA$

(4) 二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換 (5) $BABA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

【109 數甲】

答：(2)(5)

解：(1) $A^3 = A^2 A = IA = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ， $\theta = 60^\circ$ 或 180° 或 300°

(3) $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$

(4) AB 表鏡射矩陣

(5) $BABA = I$

三、選填題（佔分）

- A. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$ 、 $x-3y+2z=0$ 、 $x+y=t$ 的交點，其中 $t > 0$ 。若 $\overline{OP} = 10$ ，則 $t =$ _____。（化為最簡根式）

【109 數甲】

答： $4\sqrt{10}$

$$\text{解：} \begin{cases} x-3y-5z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+y=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4}t \\ y=\frac{1}{4}t \\ z=0 \end{cases}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}t\right)^2 + \left(\frac{1}{4}t\right)^2 + 0^2} = 10 \Rightarrow t = 4\sqrt{10}$$

B. 考慮坐標平面上相異三點 A 、 B 、 C ，其中 A 點為 $(1,1)$ 。分別以線段 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4,2)$ 。已知 $\overline{PB} = 3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為_____。【109 數甲】

答：(7, -7)

解： $\overline{AP} = (3,1)$ ， $|\overline{AP}| = \sqrt{10} \Rightarrow \overline{PB} = (x-4, y-2) = 3(1, -3)$
 $\therefore B(x, y) = (7, -7)$

C. 在一個三角形公園，其三頂點 O 、 A 、 B ，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A 、 B 與 \overline{AB} 的中點 C ，測得其俯角分別為 30° 、 60° 、 45° 。則此三角形公園的面積為_____平方公尺。(化為最簡根式)【109 數甲】

答： $7500\sqrt{2}$

解： $(150\sqrt{3})^2 + \left(\frac{150}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2(150^2 + \overline{AC}^2) \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC} = 50\sqrt{6}$

$$\cos \angle OAB = \frac{(150\sqrt{3})^2 + (100\sqrt{6})^2 - \left(\frac{150}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 \times 150\sqrt{3} \times 100\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Delta OAB \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 150\sqrt{3} \times 100\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = 7500\sqrt{2}$$

第貳部分：非選擇題 (佔 24 分)

一. 在坐標平面上，由 A 、 B 、 C 、 D 四點所決定的「貝茲曲線」(Bézier curve)指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A, D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B ，在點 D 的切線通過點 C 。令 $y = f(x)$ 是由 $A(0,0)$ 、 $B(1,4)$ 、 $C(3,2)$ 、 $D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

(1) 設 $y = f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y = ax + b$ ，其中 a, b 為實數。

求 a, b 之值。(2 分)

(2) 試證明多項式 $f(x)$ 可以被 $x^2 - 4x$ 所整除。(2 分)

(3) 試求 $f(x)$ 。(4 分)

(4) 求定積分 $\int_2^6 |8f(x)| dx$ 之值。(4分)

【109 數甲】

答：(1) $(-2, 8)$ (2) 略 (3) $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x^2 + 32x)$ (4) 56

解：(1) $\overrightarrow{CD} : (y-0) = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x + 8$

(2) $f(x) = x(x-4)(ax+b)$ 可被 $x^2 - 4x$ 整除

(3) $\overrightarrow{AB} : (y-0) = 4(x-0) \Rightarrow y = 4x$

$$f'(x) = (x-4)(ax+b) + x(ax+b) + x(x-4) \times a$$

$$f'(0) = -4b + 0 + 0 = 4 \Rightarrow b = -1$$

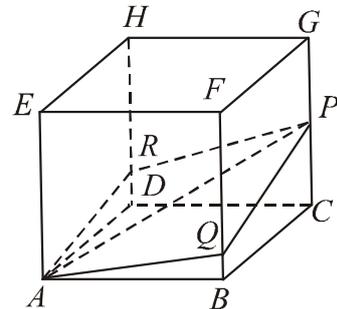
$$f'(4) = 0 + 4(4a+b) + 0 = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\text{故 } f(x) = x(x-4)\left(\frac{1}{8}x-1\right) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x^2 + 32x)$$

$$\begin{aligned} (4) \int_2^6 |8f(x)| dx &= \int_2^4 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx - \int_4^6 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 + C \right]_2^4 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 + C \right]_4^6 \\ &= [28] - [-28] = 56 \end{aligned}$$

二. 一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD-EFGH$,

點 P 為稜邊 \overline{CG} 的中點，點 Q 、 R 分別在稜邊 \overline{BF} 、 \overline{DH} 上，且 A, Q, P, R 為一平行四邊形的四個頂點，如圖所示。今設定坐標系，使得 D 、 A 、 C 、 H 的坐標分別為 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ ，且 $\overline{BQ} = t$ ，試回答下列問題。



(1) 試求點 P 的坐標。(2分)

(2) 試求向量 \overrightarrow{AR} (以 t 的式子來表示)。(2分)

(3) 試證明四角錐 $G-AQPR$ 的體積是一個定值 (與 t 無關)，並求此定值。(4分)

(4) 當 $t = \frac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。(4分)

【109 數甲】

答：(1) $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ (2) $\left(-1, 0, \frac{1}{2} - t\right)$ (3) 略 (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解：(1) P 為 \overline{CG} 中點 $\Rightarrow P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$

$$(2) Q(1, 1, t) \Rightarrow \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{QP} = \left(-1, 0, \frac{1}{2} - t\right)$$

(3) 錐體體積 = $A-QPG + A-RPG$

$$= \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{c} \overrightarrow{AQ} \\ \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AG} \end{array} \right\| + \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{c} \overrightarrow{AQ} \\ \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AG} \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & t \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right\| + \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & \frac{1}{2}-t \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \text{ 與 } t \text{ 無關}$$

$$(4) \Delta AQP \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left| \left(0, 1, \frac{1}{4} \right) \times \left(-1, 1, \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$d(G-AQP) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$