

109 學年度指定科目考試數學乙試題

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$ 與下列哪一個矩陣相等？

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ 。

2. 某畢業班由 8 位同學負責畢旅規劃，分成 A、B、C 三組，且三組分別由 3 人、3 人、2 人組成。8 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這 8 位同學總共有幾種分組方式？

(1)140 種 (2)150 種 (3)160 種 (4)170 種 (5)180 種。

3. 為了瞭解 IQ 和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了 5 個人的腦容量（以 10,000 像素為單位），連同他們的 IQ 列表如下：

| | | | | | |
|--------|----|-----|-----|----|-----|
| 腦容量(X) | 90 | 95 | 91 | 88 | 106 |
| IQ(Y) | 90 | 100 | 112 | 80 | 103 |

已知上表中的 X 之平均值為 $\mu_X = 94$ ，Y 之平均值為 $\mu_Y = 97$ ，腦容量(X)與 IQ(Y)的相關係數為 $r_{X,Y}$ 。根據上述表格，試判斷 $r_{X,Y}$ 的值最可能是下列哪一個選項？

(1) $r_{X,Y} \leq -1$ (2) $-1 < r_{X,Y} < -0.5$ (3) $r_{X,Y} = 0$ (4) $0 < r_{X,Y} < 0.5$ (5) $r_{X,Y} \geq 1$ 。

二、多選題（占 24 分）

4. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

(1) $f(0) > 0$ (2) $f(1)f(2) > 0$ (3) 若 $f(x)-1=0$ 有實根，則 $f(x)-2=0$ 有實根

(4) 若 $f(x)-1=0$ 有重根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根

(5) 若 $f(x)-1=0$ 有兩相異實根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 有實根。

5. 數列 a_1, a_2, \dots 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 2$ 。試選出正確的選項。

(1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ (5) $\sum_{n=1}^{100} a_n > 9$ 。

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

(一) 當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

(二) 當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

(三) 當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試選出正確的選項。

(1) 投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為 $\frac{1}{2}$

(2) 投擲骰子一次，棋子的坐標之期望值為 0

(3) 投擲骰子二次，棋子的坐標有可能為 -5

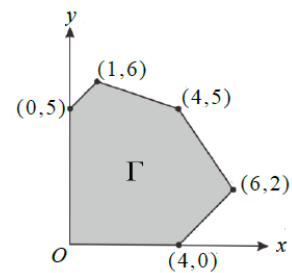
(4) 投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為正的機率為 $\frac{4}{9}$

(5) 投擲骰子三次，棋子在原點的機率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 。

三、選填題（占 32 分）

A. 坐標平面上有一個多邊形區域 Γ (含邊界)，如圖所示。

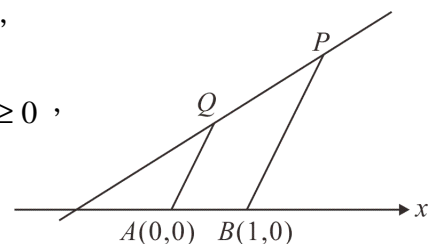
若 $k > 0$ ，直線 $7x + 2y = k$ 與兩坐標軸圍成一個三角形區域，使得多邊形區域 Γ 落在此三角形區域(含邊界)內，則最小正實數 $k =$ _____。



B. 若隨機變數 X 的可能值為 1、2、3、4，其出現的機率 $P(X = k)$ 與 $\frac{1}{k}$ 成正比，則機率 $P(X = 3)$ 為 _____。(化為最簡分數)

C. 一家公司僅有經理、秘書、業務三位成員，若只有秘書加薪 10%，則全公司薪資總支出增加 3%；若只有業務加薪 20%，則全公司薪資總支出增加 4%；如果只有經理減薪 15%，那麼全公司薪資總支出將減少 _____ %。

D. 坐標平面上有一梯形，四個頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， P ， Q ，其中過 P ， Q 兩點的直線方程式為 $y = 2x + 4$ ，如圖為示意圖。若 Q 點的坐標為 $(a, 2a + 4)$ ，其中實數 $a \geq 0$ ，則梯形 $ABPQ$ 的面積為 _____。(化為最簡分數)



第貳部分：非選擇題（占 26 分）

一. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0 ，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下， n 天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為 $P_n = P_0 (1+r)^n$ ，其中 $P_0 \geq 1$ 且 $r > 0$ 。試回答下列問題：

(1) 已知 $A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3}$ ， $B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2}$ ，試說明 $A = B$ 。(4 分)

(2) 已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，

試求 $\frac{P_{20}}{P_{17}} \times \frac{P_8}{P_6} \times \frac{P_5}{P_2}$ 的值。(5 分)

(3) 承(2)，試求 $\frac{\log P_{20} - \log P_{17}}{3}$ 的值。(4 分)

二. 在坐標平面上，兩平行直線 L_1 、 L_2 的斜率都是 2 且距離為 5，又點 $A(2, -1)$ 是 L_1 在第四象限的一點，點 B 是 L_2 在第二象限的一點且 $\overline{AB} = 5$ 。已知直線 L_3 的斜率為 3，通過點 A 且交 L_2 於點 C ，試回答下列問題：

(1) 試求直線 AB 的斜率。(2 分)

(2) 試求向量 \overrightarrow{AB} 。(4 分)

(3) 試求內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值。(3 分)

(4) 試求向量 \overrightarrow{AC} 。(4 分)

2020年指定科目考試數學乙 參考答案

選擇題：1.(5) 2.(1) 3.(4) 4.(2)(3)(4) 5.(2)(3) 6.(2)(4)

選填題：A. 46 B. $\frac{4}{25}$ C. 7.5 D. $\frac{5}{2}a+5$

非選擇題：一. (1) 略 (2) $\sqrt{10}$ (3) $\frac{1}{16}$

二. (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ (3) 25 (4) $\overrightarrow{AC} = (5\sqrt{5}, 15\sqrt{5})$