

大學入學考試中心

109 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$ 與下列哪一個矩陣相等？

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ 。

【109 數乙】

答：(5)

解： $A^5 = (-I + B)^5$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= C_0^5 (-I)^5 + C_1^5 (-I)^4 B$$

$$= -I + 5B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 某畢業班由 8 位同學負責畢旅規劃，分成 A、B、C 三組，且三組分別由 3 人、3 人、2 人組成。8 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這 8 位同學總共有幾種分組方式？

(1)140 種 (2)150 種 (3)160 種 (4)170 種 (5)180 種。

【109 數乙】

答：(1)

解： $\left. \begin{array}{l} \text{甲乙在 A 組 } C_1^6 C_3^5 C_2^2 = 60 \\ \text{甲乙在 B 組 } C_3^6 C_1^3 C_2^2 = 60 \\ \text{甲乙在 C 組 } C_3^6 C_3^3 = 20 \end{array} \right\} \text{合計 140 種}$

3. 為了瞭解 IQ 和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了 5 個人的腦容量（以 10,000 像素為單位），連同他們的 IQ 列表如下：

腦容量 (X)	90	95	91	88	106
IQ (Y)	90	100	112	80	103

已知上表中的 X 之平均值為 $\mu_X = 94$ ，Y 之平均值為 $\mu_Y = 97$ ，腦容量 (X) 與 IQ (Y) 的相關係數為 $r_{X,Y}$ 。根據上述表格，試判斷 $r_{X,Y}$ 的值最可能是下列哪一個選項？

(1) $r_{X,Y} \leq -1$ (2) $-1 < r_{X,Y} < -0.5$ (3) $r_{X,Y} = 0$ (4) $0 < r_{X,Y} < 0.5$ (5) $r_{X,Y} \geq 1$ 。

【109 數乙】

答：(4)

解：

x_i	y_i	$x_i - \mu_A$	$y_i - \mu_B$	$(x_i - \mu_A)^2$	$(y_i - \mu_B)^2$	$(x_i - \mu_A)(y_i - \mu_B)$
90	90	-4	-7	16	49	28
95	100	1	3	1	9	3
91	112	-3	15	9	225	-45
88	80	-6	-17	36	289	102
106	103	12	6	144	36	72
$\mu_x = 94$				$\Sigma = 206$	$\Sigma = 608$	$\Sigma = 160$
$\mu_y = 97$						

$$r_{X,Y} = \frac{160}{\sqrt{206} \sqrt{608}} \doteq 0.45 \dots$$

二、多選題 (佔 24 分)

4. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) > 0$ (2) $f(1)f(2) > 0$
 (3) 若 $f(x)-1=0$ 有實根，則 $f(x)-2=0$ 有實根
 (4) 若 $f(x)-1=0$ 有重根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根
 (5) 若 $f(x)-1=0$ 有兩相異實根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 有實根。

【109 數乙】

答：(2)(3)(4)

解：(1) 不一定

(2) $f(t), f(s) > 0$

(3) $f(x)-1=0$ 有實根，表 $y=f(x)$ 開口向上
 $\Rightarrow f(x)-2=0$ 必有實根

(4) $f(x)-1=0$ 有重根，表 $y=f(x)$ 開口向上，頂點 $(x,1)$
 $\Rightarrow f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根

(5) 不一定，可能頂點 (x,y) ， $\frac{1}{2} < y < 1$

5. 數列 a_1, a_2, \dots 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3, a_2 = 2$ 。試選出正確的選項。

(1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

(5) $\sum_{n=1}^{100} a_n > 9$ 。

【109 數乙】

答：(2)(3)

解： $a_1 = 3, a_3 = 1, a_5 = \frac{1}{3}, a_7 = \frac{1}{9}, a_9 = \frac{1}{27}, a_{11} = \frac{1}{81}$

$$a_2 = 2, a_4 = 1, a_6 = \frac{1}{2}, a_8 = \frac{1}{4}, a_{10} = \frac{1}{8}, a_{12} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{81}} = \frac{81}{8} > 10, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

$$\lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{3 \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}} = \lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \text{ 發散}$$

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{17}{2} - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{50} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{50} < 9$$

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

(一) 當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

(二) 當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

(三) 當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試選出正確的選項。

(1) 投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為 $\frac{1}{2}$

(2) 投擲骰子一次，棋子的坐標之期望值為 0

(3) 投擲骰子二次，棋子的坐標有可能為 -5

(4) 投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為正的機率為 $\frac{4}{9}$

(5) 投擲骰子三次，棋子在原點的機率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 。

【109 數乙】

答：(2)(4)

解：(1) $\underbrace{P(4 \text{ 點})}_{\text{位於}+2} + \underbrace{P(3 \text{ 點})}_{\text{位於}-2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$(2) E(X) = \frac{1}{6} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{點}}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ 4 \text{點}}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ 6 \text{點}}}{3} - \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \text{點}}}{0} - \underset{\substack{\uparrow \\ 3 \text{點}}}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ 5 \text{點}}}{4} \right] = 0$$

(3) 因為 -5 為奇數，故不可能

(4) $(1-0), (2-0), (3-0), (3-2)$

$$\frac{4 \times 2!}{9 \times 2!} = \frac{4}{9}$$

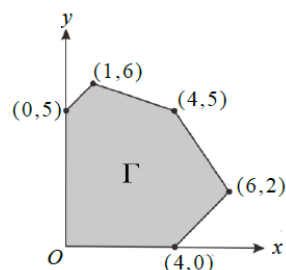
$(1-0), (1-2), (1-4),$
 $(2-0), (2-2), (2-4),$
 $(3-0), (3-2), (3-4)$

$$(5) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left[\underbrace{\frac{3!}{3!}}_{-0-0-0} + \underbrace{\frac{3!}{2!} \times 2}_{2-2-0, +1+1-2} + \underbrace{\frac{3! \times 2}{2-2-0, 1+3-4}} \right] = \frac{19}{216}$$

三、選填題 (佔 32 分)

A. 坐標平面上有一個多邊形區域 Γ (含邊界)，如圖所示。

若 $k > 0$ ，直線 $7x + 2y = k$ 與兩坐標軸圍成一個三角形區域，使得多邊形區域 Γ 落在此三角形區域 (含邊界) 內，則最小正實數 $k =$ _____。



【109 數乙】

答：46

解：

(x, y)	$(0, 5)$	$(1, 6)$	$(4, 5)$	$(6, 2)$	$(4, 0)$
$7x + 2y = k$	10	19	38	46	28

B. 若隨機變數 X 的可能值為 $1, 2, 3, 4$ ，其出現的機率 $P(X = k)$ 與 $\frac{1}{k}$ 成正比，則機率 $P(X = 3)$ 為 _____。(化為最簡分數)

【109 數乙】

答： $\frac{4}{25}$

解： $P(X = 1, 2, 3, 4) = \frac{t}{1} + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = 1 \Rightarrow t = \frac{12}{25}$

$$P(X = 3) = \frac{t}{3} = \frac{4}{25}$$

C. 一家公司僅有經理、秘書、業務三位成員，若只有秘書加薪 10%，則全公司薪資總支出增加 3%；若只有業務加薪 20%，則全公司薪資總支出增加 4%；如果只有經理減薪 15%，那麼全公司薪資總支出將減少 _____%。

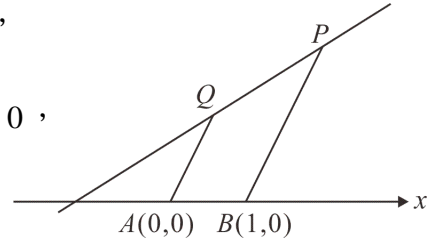
【109 數乙】

答： 7.5

解：
$$\begin{cases} A+1.1B+C=1.03(A+B+C) \\ A+B+1.2C=1.04(A+B+C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7B=3A+3C \\ 4C=A+B \end{cases} \Rightarrow A:B:C=5:3:2$$

$$0.85A+B+C=(1-k)(A+B+C) \Rightarrow k=0.75$$

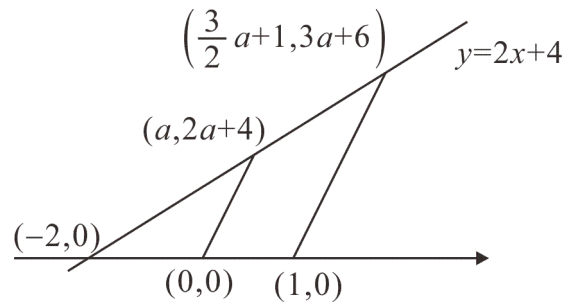
D. 坐標平面上有一梯形，四個頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， P ， Q ，其中過 P ， Q 兩點的直線方程式為 $y=2x+4$ ，如圖為示意圖。若 Q 點的坐標為 $(a, 2a+4)$ ，其中實數 $a \geq 0$ ，則梯形 $ABPQ$ 的面積為_____。(化為最簡分數)



【109 數乙】

答： $\frac{5}{2}a+5$

解：



第貳部分：非選擇題 (佔 26 分)

一. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0 ，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下， n 天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為

$P_n = P_0 (1+r)^n$ ，其中 $P_0 \geq 1$ 且 $r > 0$ 。試回答下列問題：

(1) 已知 $A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3}$ ， $B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2}$ ，試說明 $A = B$ 。(4 分)

(2) 已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，

試求 $\frac{P_{20}}{P_{17}} \times \frac{P_8}{P_6} \times \frac{P_5}{P_2}$ 的值。(5 分)

(3) 承(2)，試求 $\frac{\log P_{20} - \log P_{17}}{3}$ 的值。(4 分)

【109 數乙】

答： (2) $\sqrt{10}$ (3) $\frac{1}{16}$

解： (1) $A - B = \frac{2 \log P_5 - 2 \log 2 - 3 \log P_8 + 3 \log P_6}{6}$

$$= \frac{1}{6} \log \left(\frac{P_5^2 \times P_6^3}{P_2^2 P_8^3} \right) = \frac{1}{6} \log \left(\frac{P_0^2 (1+r)^{10} P_0^3 (1+r)^{18}}{P_0^2 (1+r)^4 P_0^3 (1+r)^{24}} \right) = \frac{1}{6} \log 1 = 0$$

(2) $P_{16} = P_0 (1+r)^{16} = 10P_0 \Rightarrow (1+r)^{16} = 10$

$$\text{所求} = \frac{P_0 (1+r)^{20} \times P_0 (1+r)^8 \times P_0 (1+r)^5}{P_0 (1+r)^{17} \times P_0 (1+r)^6 \times P_0 (1+r)^2} = (1+r)^8 = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 所求} &= \frac{1}{3} \log \left(\frac{P_{20}}{P_{17}} \right) = \frac{1}{3} \log \left(\frac{P_0 (1+r)^{20}}{P_0 (1+r)^{17}} \right) = \log \left[(1+r)^3 \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \log (1+r) = \log 10^{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

二. 在坐標平面上，兩平行直線 L_1 、 L_2 的斜率都是 2 且距離為 5，又點 $A(2, -1)$ 是 L_1 在第四象限的一點，點 B 是 L_2 在第二象限的一點且 $\overline{AB} = 5$ 。已知直線 L_3 的斜率為 3，通過點 A 且交 L_2 於點 C ，試回答下列問題：

(1) 試求直線 AB 的斜率。(2 分)

(2) 試求向量 \overrightarrow{AB} 。(4 分)

(3) 試求內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值。(3 分)

(4) 試求向量 \overrightarrow{AC} 。(4 分)

【109 數乙】

答：斜率 $AB = -\frac{1}{2}$ ， $\overline{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ， $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 25$ ， $\overline{AC} = (5\sqrt{5}, 15\sqrt{5})$

解： $L_1 : (y+1) = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 5$ 。故 $L_2 : y = 2x + k$ ，過第二象限，故 $k > 0$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|k+5|}{\sqrt{5}} = 5 \Rightarrow k = 5\sqrt{5} - 5。故 $L_2 : y = 2x + 5\sqrt{5} - 5$$$

$$B(t, 2t + 5\sqrt{5} - 5) \in \text{第二象限}, \overline{AB} = \sqrt{(t-2)^2 + (2t + 5\sqrt{5} - 4)^2} = 5 \Rightarrow t = 2 - 2\sqrt{5}$$

$$\text{故 } \overline{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), \text{ 斜率 } AB = -\frac{1}{2}$$

$$L_3 : (y+1) = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x - 7, \text{ 與 } L_2 \text{ 交於 } C(5\sqrt{5} + 2, 15\sqrt{5} - 1)$$

$$\text{故 } \overline{AC} = (5\sqrt{5}, 15\sqrt{5}), \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -50 + 75 = 25$$