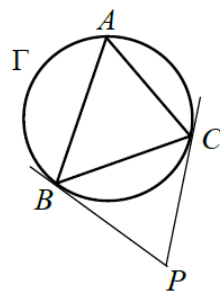


# 110 年大學學科能力測驗數學試題

## 第壹部分：選擇題（佔 65 分）

### 一、單選題（佔 30 分）

- 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，若  $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則  $a+b+c+d$  之值為下列哪一個選項？  
(1)158 (2)162 (3)166 (4)170 (5)174。
- 五項實數數列  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若  $a_1 = \log_{10} 36$ ，則  $a_5$  有多少種可能的值？  
(1)3 (2)4 (3)5 (4)7 (5)8。
- 如圖， $\triangle ABC$  為銳角三角形， $P$  為  $\triangle ABC$  外接圓  $\Gamma$  外的一點，且  $\overline{PB}$  與  $\overline{PC}$  都與圓  $\Gamma$  相切。設  $\angle BPC = \theta$ ，試問  $\cos A$  的值為下列哪一個選項？  
(1)  $\sin 2\theta$  (2)  $\frac{\sin \theta}{2}$  (3)  $\sin \frac{\theta}{2}$  (4)  $\frac{\cos \theta}{2}$  (5)  $\cos \frac{\theta}{2}$ 。
- 設  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  都是平面上不為零的向量。若  $2\vec{a} + \vec{b}$  與  $\vec{a} + 2\vec{b}$  所張成的三角形面積為 6，則  $3\vec{a} + \vec{b}$  與  $\vec{a} + 3\vec{b}$  所張成的三角形面積為下列哪一個選項？  
(1)8 (2)9 (3)12 (4)13.5 (5)16。
- 設  $f(x)$  為實係數三次多項式函數，滿足  $(x+1)f(x)$  除以  $x^3 + 2$  的餘式為  $x+2$ 。若  $f(0)=4$ ，則  $f(2)$  的值為下列哪一個選項？(1)8 (2)10 (3)15 (4)18 (5)20。
- 坐標平面上有一邊長為 3 的正六邊形  $ABCDEF$ ，其中  $A(3,0)$ 、 $D(-3,0)$ 。試問橢圓  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$  與正六邊形  $ABCDEF$  有多少個交點？(1)0 (2)2 (3)4 (4)6 (5)8。



### 二、多選題（佔 30 分）

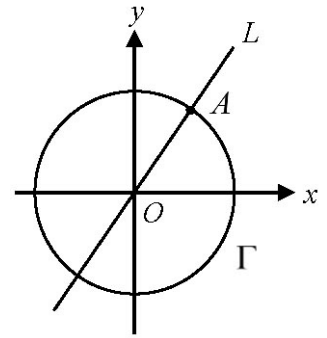
- 心理學家找了 1000 位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識 6、8、9 三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

看成數字 \ 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

- 如果實際數字是 8，則至少有一半的可能性會被看成是 8
- 如果實際數字是 6，則有六成的可能性會被看成不是 6
- 在 6、8、9 三數字中，被誤認的可能性以 9 最低
- 如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的可能性不到一半
- 如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的可能性超過  $\frac{2}{3}$ 。

8. 如圖， $L$  為坐標平面上通過原點  $O$  的直線， $\Gamma$  是以  $O$  為圓心的圓，且  $L$  與  $\Gamma$  有一個交點  $A(3, 4)$ 。已知  $B$ 、 $C$  為  $\Gamma$  上的相異兩點滿足  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ 。試選出正確的選項。



- (1)  $L$  與  $\Gamma$  的另一個交點為  $(-4, -3)$   
 (2) 直線  $BC$  的斜率為  $\frac{3}{4}$  (3)  $\angle AOC = 60^\circ$   
 (4)  $\Delta ABC$  的面積為  $\frac{25\sqrt{3}}{2}$  (5)  $B$  與  $C$  在同一象限內。

9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表（廢票不列入計算）：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為  $x$  與  $y$ （其中  $x > 0$ ， $y > 0$ ），且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

- (1) 當有效票數的總和  $x + y$  已知時，就可決定當選人  
 (2) 當  $x : y$  的比值小於  $\frac{1}{2}$  時，就可決定當選人 (3) 當  $x > y$  時，就可決定當選人  
 (4) 當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人  
 (5) 當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人。

10. 在  $\Delta ABC$  中，已經知道  $\overline{AB} = 4$  和  $\overline{AC} = 6$ ，此時尚不足以確定  $\Delta ABC$  的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道  $\overline{BC}$  的長度），就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

- (1) 如果再知道  $\cos A$  的值，就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小  
 (2) 如果再知道  $\cos B$  的值，就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小  
 (3) 如果再知道  $\cos C$  的值，就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小  
 (4) 如果再知道  $\Delta ABC$  的面積，就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小  
 (5) 如果再知道  $\Delta ABC$  的外接圓半徑，就可確定  $\Delta ABC$  唯一的形狀與大小。

11. 平面上有一梯形  $ABCD$ ，其上底  $\overline{AB} = 10$ 、下底  $\overline{CD} = 15$ ，且腰長  $\overline{AD} = \overline{BC} + 1$ 。

試選出正確的選項。(1)  $\angle A > \angle B$  (2)  $\angle B + \angle D < 180^\circ$  (3)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$

(4)  $\overline{BC}$  的長可能是 2 (5)  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} < 30$ 。

12. 設  $P(X)$  表示事件  $X$  發生的機率，而  $P(X|Y)$  表示在事件  $Y$  發生的條件下，事件  $X$  發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件  $A$  為 2 顆黑球相鄰的事件，事件  $B$  為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件  $C$  為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

(1)  $P(A) > P(B)$  (2)  $P(C) = \frac{2}{7}$  (3)  $2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$

(4)  $P(C|A) > 0.2$  (5)  $P(C|B) > 0.3$ 。

13. 設多項式函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中  $a, b, c$  均為有理數。試選出正確的選項。
- (1) 函數  $y = f(x)$  與拋物線  $y = x^2 + 100$  的圖形可能沒有交點
  - (2) 若  $f(0)f(1) < 0 < f(0)f(2)$ ，則方程式  $f(x) = 0$  必有三個相異實根
  - (3) 若  $1 + 3i$  是方程式  $f(x) = 0$  的複數根，則方程式  $f(x) = 0$  有一個有理根
  - (4) 存在有理數  $a, b, c$  使得  $f(1), f(2), f(3), f(4)$  依序形成等差數列
  - (5) 存在有理數  $a, b, c$  使得  $f(1), f(2), f(3), f(4)$  依序形成等比數列。

**第貳部分：選擇題（佔 35 分）**

- A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：  
以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。  
如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後\_\_\_\_\_秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。
- B. 坐標空間中有兩條直線  $L_1, L_2$  與一平面  $E$ ，其中直線  $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$ ，  
而  $L_2$  的參數式為  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$  ( $t$  為實數)。若  $L_1$  落在  $E$  上，且  $L_2$  與  $E$  不相交，  
則  $E$  的方程式為\_\_\_\_\_。
- C. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，  
則三數乘積是一完全平方數的機率為\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)
- D. 在坐標平面上， $\Gamma$  是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 (1, 1)，且各邊與坐標軸平行。  
已知函數  $y = a \times 2^x$  的圖形與  $\Gamma$  相交，其中  $a$  為實數，則  $a$  的最大可能範圍為\_\_\_\_\_。
- E. 將  $(\sqrt[3]{49})^{100}$  寫成科學記號  $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ，且  $n$  為正整數。  
若  $a$  的整數部分為  $m$ ，則數對  $(m, n) =$ \_\_\_\_\_。
- F. 如圖，機器人在地面上從一點  $P$  出發，按照以下規則移動：  
先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉  $45^\circ$ ；朝新方向前進一公尺後，  
依前進方向順時針旋轉  $90^\circ$ ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉  $45^\circ$ ；  
再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉  $90^\circ$ ，……，以此類推。已知機器人  
移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為\_\_\_\_\_平方公尺。
- G. 在四面體  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 4\sqrt{6}$ 、 $\overline{BD} = \overline{CD} = 8$ ，且  $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，  
則點  $D$  到平面  $ABC$  的距離為\_\_\_\_\_。(化成最簡根式)

## 2021年大學學科能力測驗 參考答案

選擇題：1.(2) 2.(1) 3.(3) 4.(5) 5.(4) 6.(5) 7.(2)(3)(4) 8.(3)(5) 9.(2)(3)(4)  
10.(1)(2) 11.(1)(2)(5) 12.(2)(5) 13.(2)(3)(5)

選填題：A. 37 B.  $x-6y+4z=0$  C.  $\frac{1}{14}$  D.  $-2 \leq a \leq 6$  E. (2,56)  
F.  $8+4\sqrt{2}$  G.  $4\sqrt{2}$