

大學入學考試中心

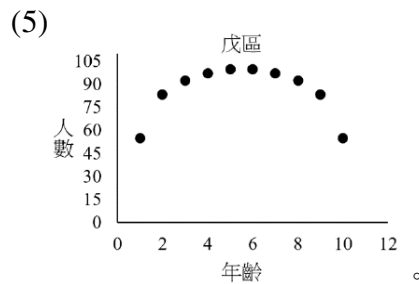
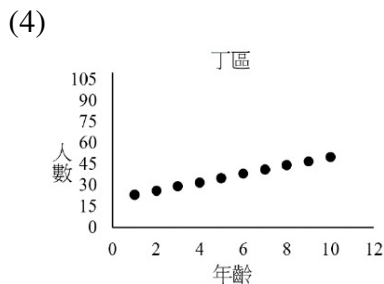
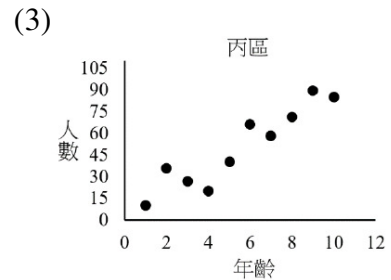
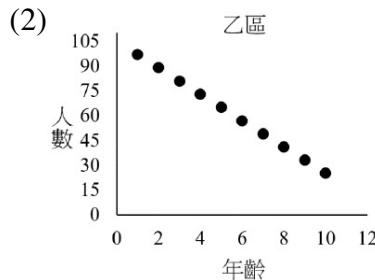
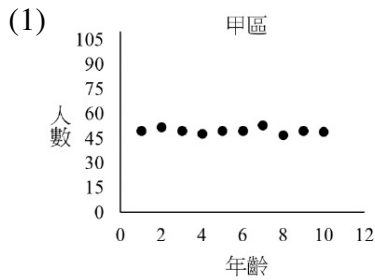
110 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 下列選項分別為甲、乙、丙、丁、戊等五個地區 1 至 10 歲（以整數計）兒童罹患某疾病的人數散佈圖。試選出罹患某疾病的人數與年齡相關係數值最大的選項。



【110 數乙】

答：(4)

解：相關係數 $r_4 > r_3 > r_1 \approx r_5 \approx 0 > r_2$

2. 已知實係數二次多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(-1)=k$ ， $f(1)=9k$ ， $f(3)=-15k$ ，其中 $k > 0$ 。設函數 $y=f(x)$ 圖形頂點的 x 坐標為 a ，試選出正確的選項。

(1) $a \leq -1$ (2) $-1 < a < 1$ (3) $a = 1$ (4) $1 < a < 3$ (5) $3 \leq a$ 。

【110 數乙】

答：(2)

解： $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c = k \\ f(1) = a + b + c = 9k \\ f(3) = 9a + 3b + c = -15k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4k \\ b = 4k \\ c = 9k \end{cases}$$

$$f(x) = -4kx^2 + 4kx + 9k = -4k\left(x^2 - x\right) + 9k = -4k\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 10k, \quad k > 0$$

表頂點 $\left(\frac{1}{2}, 10k\right)$ ，即 $a = \frac{1}{2}$

3. 某公司舉辦年終抽獎活動，每人從編號分別為1至6的六張牌中隨機抽取兩張。假設每張牌抽到的機會均相等，且規則如下：
- (一)若這兩張牌的號碼之和是奇數，則可得獎金100元，此時抽獎結束；
- (二)若號碼之和為偶數，就將這兩張牌丟掉，再從剩下的四張牌中隨機抽取兩張牌，且其號碼之和為奇數，則可得獎金50元，其他情形則沒有獎金，此時抽獎結束。依上述規則，試求每人參加此抽獎活動的獎金期望值為多少元？
- (1)50 (2)70 (3)72 (4)80 (5)100。

【110 數乙】

答：(2)

A	首次和為奇	首次和為偶，次回和為奇
P	$\frac{C_1^3 C_1^3}{C_2^6} = \frac{3}{5}$	$\frac{C_2^3}{C_2^6} \times \frac{C_1^1 C_1^3}{C_2^4} \times 2 = \frac{1}{5}$
\$	100	50

$$E(X) = 100 \times \frac{3}{5} + 50 \times \frac{1}{5} = 70$$

二、多選題 (佔 32 分)

4. 設 $a = \log_2 8$ ， $b = \log_3 1$ ， $c = \log_{0.5} 8$ ，試選出正確的選項。

(1) $b=0$ (2) $a+b+c>0$ (3) $a>b>c$ (4) $a^2 > b^2 > c^2$ (5) $2^a > 3^b > \left(\frac{1}{2}\right)^c$ 。

【110 數乙】

答：(1)(3)

解： $a = \log_2 8 = 3$ ， $b = \log_3 1 = 0$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

(2) $a+b+c=0$ (4) $a^2 = c^2 = 9 > b^2 = 0$ (5) $2^a = \left(\frac{1}{2}\right)^c = 8 > 3^b = 1$

5. 某便利商店將甲、乙、丙三個積木模型和 a 、 b 、 c 、 d 、 e 五個角色公仔，共八個玩具，分成兩袋販售。每袋均裝有四個玩具，其分裝的原則如下：
- (一)甲和 a 必須裝在同一袋。
- (二)每袋至少裝有一個積木模型。
- (三) d 和 e 必須裝在不同袋。
- 根據以上敘述，試選出正確的選項。
- (1)每袋至少裝有兩個角色公仔
- (2)乙和丙必裝在不同袋
- (3)如果乙和 d 裝在同一袋，則丙和 e 必裝在同一袋
- (4)如果乙和 d 裝在不同袋，則 b 和 c 必裝在不同袋
- (5)如果 b 和 c 裝在不同袋，則乙和丙必裝在同一袋。

【110 數乙】

答：(1)(5)

解：(2)反例： $[d \text{ 甲 } ab] + [e \text{ 乙 } 丙 c]$

(3)反例： $[d \text{ 乙 } 丙 b] + [e \text{ 甲 } ac]$

(4)反例： $[d \text{ 甲 } a \text{ 丙}] + [e \text{ 乙 } bc]$

6. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1}a_n$ ， n 為正整數，
試選出正確的選項。

- (1) $a_2 = 3$ (2) $a_4 = 9$ (3) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列 (4) $\sum_{n=1}^{20} a_n = 400$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$ 。

【110 數乙】

答：(1)(4)(5)

解：由 $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1}a_n$ ，且 $a_1 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{3}{1} \times a_1 \\ a_3 = \frac{5}{3} \times a_2 \\ a_4 = \frac{7}{5} \times a_3 \\ \vdots \\ a_n = \frac{2n-1}{2n-3} \times a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = (2n-1) \times a_1 = 2n-1 \\ \text{表 } \langle a_n \rangle \text{ 為等差數列} \\ \text{前項 } a_1 = 1, \text{ 公差 } d = 2 \\ \text{故 } a_2 = 3, a_4 = 7 \\ \text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2 \end{cases}$$

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{20} a_n = [2 \times 1 + (20-1) \times 2] \times \frac{20}{2} = 400 \quad (\text{或 } \sum_{n=1}^{20} a_n = 20^2 = 400)$$

7. 已知某人每次飛鏢射中的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，且每次射飛鏢的結果均互相獨立。
試從下列選項中，選出發生機率為 $\frac{1}{2}$ 的事件。

- (1) 連續射 2 次飛鏢，恰射中 1 次
(2) 連續射 4 次飛鏢，恰射中 2 次
(3) 連續射 4 次飛鏢，射中的總次數為奇數
(4) 連續射 6 次飛鏢，在第 1 次沒有射中的條件下，第 2 次有射中
(5) 連續射 6 次飛鏢，在前 2 次恰射中 1 次的條件下，後 4 次恰射中 2 次。

【110 數乙】

答：(1)(3)(4)

解：(1) $C_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

(2) $C_2^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

(3) $C_1^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

$$(5) \frac{C_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) C_2^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{C_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{8}$$

三、選填題 (佔 24 分)

A. 數線上有原點 O 及三點 $A(-2)$ 、 $B(10)$ 、 $C(x)$ ，其中為 x 實數。

已知線段 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{OB} 長度大小關係為 $\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{OB}$ ，則 x 的最大範圍為_____。

【110 數乙】

答： $4 < x < 8$

解： $\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{OB} \Rightarrow |x-10| < |x+2| < 10$

$\Rightarrow x > 4$ 且 $-12 < x < 8$ 且 $0 < x < 20 \Rightarrow 4 < x < 8$

B. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ，

其中 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣，若 $A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，

則 $a+b+c+d =$ _____。

【110 數乙】

答： 14

解： $A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

解： $A = \begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

C. 已知一個不均勻銅板，投擲時出現正面的機率為 $\frac{1}{3}$ ，出現反面的機率為 $\frac{2}{3}$ 。

今在坐標平面上有一顆棋子，依投擲此銅板的正反面的結果，前進至下一個位置，規則如下：

(一)若擲出為正面，則從目前位置依著向量 $(-1, 2)$ 的方向與長度，前進至下一個位置；

(二)若擲出為反面，則從目前位置依著向量 $(1, 0)$ 的方向與長度，前進至下一個位置；

例如：棋子目前位置在坐標 $(2, 4)$ ，若擲出反面，則棋子前進至坐標 $(3, 4)$ 。假設棋子以原點 $(0, 0)$ 為起始點，依上述規則，連續投擲此銅板 6 次，且每次投擲均互相獨立，則經過 6 次移動後，棋子停在坐標_____的機率最大。

【110 數乙】

答： $(2, 4)$

解：令 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ ，

$$\text{當 } C_{k-1}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} \leq C_k^6 \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \geq C_{k+1}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}}$ $k=2$ 時（即正面 2 次，反面 4 次）有最大機率，
此時點坐標為 $2(-1, 2) + 4(1, 0) = (2, 4)$

解：令 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ ，當 $(6+1) \times \frac{1}{3} - 1 \leq k \leq (6+1) \times \frac{1}{3}$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}}$ $k=2$ 時（即正面 2 次，反面 4 次）有最大機率，
此時點坐標為 $2(-1, 2) + 4(1, 0) = (2, 4)$

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

一. 坐標平面上有兩點 $A(-3, 4)$ ， $B(3, 2)$ 及一條直線 L 。已知 A 、 B 兩點在直線 L 的兩側且 $\vec{n} = (4, -3)$ 是直線 L 的法向量。

設 A 點到直線 L 的距離為 B 點到直線 L 的距離的 5 倍。根據上述，試回答下列問題

- (1) 試求向量 \vec{AB} 與向量 \vec{n} 的內積
- (2) 試求直線 L 的方程式
- (3) 設 P 點在直線 L 上且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，試求 P 點坐標。

【110 數乙】

答：(1) 30 (2) $4x - 3y - 1 = 0$ (3) $P(-2, -3)$

解：(1) $\vec{AB} \cdot \vec{n} = (6, -2) \cdot (4, -3) = 24 + 6 = 30$

(2) $\vec{n} = (4, -3)$ 為 L 的法向量 $\Rightarrow L: 4x - 3y = k$

$$d(A, L) = 5d(B, L) \Rightarrow \frac{|-24 - k|}{5} = 5 \times \frac{|6 - k|}{5} \Rightarrow k = 1 \text{ 或 } k = \frac{27}{2}$$

$\xrightarrow{A, B \text{ 在 } L \text{ 異側}}$ $k = 1$ ，故 $L: 4x - 3y = 1$

(3) $\because \overline{PA} = \overline{PB} \therefore P \in \overline{AB}$ 之中垂線 $3x - y + 3 = 0$

$$\text{又 } P \in L \therefore \begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 交於 } P(-2, -3)$$

二. 已知某廠商生產甲、乙兩型電動車所需的成本有電池、馬達、其他等三大類，甲、乙兩型的各類成本如下表（單位：萬元）：

	電池成本	馬達成本	其他成本
甲型	56	26	48
乙型	40	20	56

今該廠商甲、乙兩型電動車售價的算式為「電池成本的 x 倍」、「馬達成本的 y 倍」與

「其他成本的 $\frac{x+y}{2}$ 倍」之總和，即

$$\text{售價} = \text{電池成本} \times x + \text{馬達成本} \times y + \text{其他成本} \times \frac{x+y}{2}$$

其中倍數 x 、 y 需滿足「 $1 \leq x \leq 2$ ， $1 \leq y \leq 2$ ，且甲、乙兩型電動車的售價均不超過 200 萬元」。

該廠商為了區隔產品，希望甲、乙兩型電動車的售價差距最大。根據上述資訊，試回答下列問題。

(1) 試寫出甲、乙兩型電動車的售價（以 x 、 y 的式子來表示），並說明「甲型電動車的售價必定高於乙型電動車的售價」。（4分）

(2) 試在坐標平面上，畫出滿足題幹條件 (x, y) 的可行解區域，並以斜線標示該區域。（4分）

(3) 試求當倍數 x 、 y 分別為多少時，甲、乙兩型電動車的售價差距最大？此時甲、乙兩型電動車的售價差距為多少萬元？（6分）

【110 數乙】

答：(1) 如說明 (2) 如圖 (3) $x = \frac{15}{8}$ 、 $y = 1$ 時，有最大值 24.5 萬元

解：(1) 甲售價 = $56x + 26y + 48\left(\frac{x+y}{2}\right) = 80x + 50y \leq 200$

乙售價 = $40x + 20y + 56\left(\frac{x+y}{2}\right) = 68x + 48y \leq 200$

因為 $1 \leq x \leq 2$ 、 $1 \leq y \leq 2$

則甲乙價差

$$= (80x + 50y) - (68x + 48y)$$

$$= 12x + 2y > 0$$

(2)(3) 限制範圍

$$\Rightarrow \begin{cases} 80x + 50y \leq 200 \\ 68x + 48y \leq 200 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

目標函數

$$f(x, y) = 12x + 2y$$

	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$\left(\frac{5}{4}, 2\right)$	$\left(\frac{15}{8}, 1\right)$
$f(x, y)$	14	16	19	24.5

表 $x = \frac{15}{8}$ 、 $y = 1$ 時

目標函數有最大值 24.5 萬元

