110 年大學學科能力測驗數學 A 試題

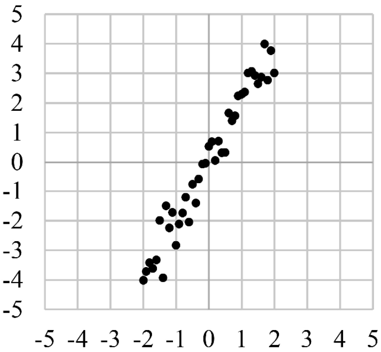
第壹部分：選擇題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 某冰淇淋店最少需準備n桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過100種」。試問來店顧客從n桶中任選兩球(可為同一口味)共有幾種方法？(1)101　(2)105　(3)115　(4)120　(5)225 。

2. 某品牌計算機在計算對數$\log_a b$時需按$\boxed{\log}$ $\boxed{(}$ $\boxed{a}$ $\boxed{,}$ $\boxed{b}$ $\boxed{)}$。某生在計算$\log_a b$時(其中$a>1$且$b>1$)順序弄錯，誤按$\boxed{\log}$ $\boxed{(}$ $\boxed{b}$ $\boxed{,}$ $\boxed{a}$ $\boxed{)}$，所得為正確值的$\dfrac{9}{4}$倍。試選出a，b間的關係式。(1) $a^2=b^3$　(2) $a^3=b^2$　(3) $a^4=b^9$　(4) $2a=3b$　(5) $3a=2b$ 。

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。附圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？
(1) $y=2x$　(2) $y=-2x$　(3) $y=-x$
(4) $y=\dfrac{x}{2}$　(5) $y=-\dfrac{x}{2}$ 。



4. 設等差數列$\langle a_n \rangle$之首項a_1與公差d皆為正數，且$\log a_1$,$\log a_3$,$\log a_6$依序也成等差數列。試選出數列$\log a_1$,$\log a_3$,$\log a_6$的公差。
(1) $\log d$　(2) $\log\dfrac{2}{3}$　(3) $\log\dfrac{3}{2}$　(4) $\log 2d$　(5) $\log 3d$ 。

5. 已知某地區有30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為80%，將未染病者判為陰性的機率則為60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為P；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為P'。試問$\dfrac{P}{P'}$最接近哪一選項？(1) 7　(2) 8　(3) 9　(4) 10　(5) 11。

6. 設坐標平面上兩直線L_1、L_2的斜率皆為正，且L_1、L_2有一夾角的平分線斜率為$\dfrac{11}{9}$。另一直線L通過點$\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$且與$L_1$、$L_2$所圍的有界區域為正三角形，試問$L$的方程式為下列哪一選項？　(1) $11x-9y=19$　(2) $9x+11y=25$　(3) $11x+9y=25$
(4) $27x-33y=43$　(5) $27x+33y=65$ 。

二、多選題(占 30 分)

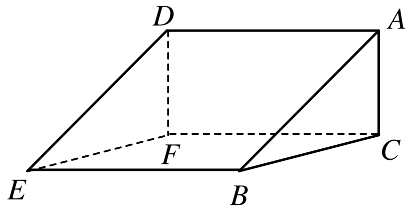
7. 設整數n滿足$|5n-21|\ge 7|n|$。試選出正確的選項。
(1) $|5n-7n|\ge 21$　(2) $-1\le\dfrac{7n}{5n-21}\le 1$　(3) $7n\le 5n-21$
(4) $(5n-21)^2\ge 49n^2$　(5) 滿足題設不等式的整數n有無窮多個。

8. 坐標平面上，ΔABC 三頂點的坐標分別為 $A(0,2)$、$B(1,0)$、$C(4,1)$，
試選出正確的選項。
(1) ΔABC 的三邊中，$\overline{AC}$ 最長　(2) $\sin A < \sin C$　(3) ΔABC 為銳角三角形
(4) $\sin B = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　(5) ΔABC 的外接圓半徑比 2 小。

9. 已知 P 為 ΔABC 內一點，且 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$，其中 a、b 為相異實數。
設 Q、R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR} = a\overrightarrow{AB} + (b-0.05)\overrightarrow{AC}$。
試選出正確的選項。
(1) Q、R 也都在 ΔABC 內部　(2) $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$　(3) ΔABP 面積 $=$ ΔACQ 面積
(4) ΔBCP 面積 $=$ ΔBCQ 面積　(5) ΔABP 面積 $>$ ΔABR 面積。

10. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$。令 $g(x) = f(-x) - 3$，已知 $y = g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,0)$ 且 $g(-1) < 0$。試選出正確的選項。
(1) $g(x) = 0$ 有三相異整數根　(2) $a < 0$　(3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1,-3)$
(4) $f(100) < 0$　(5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線。

11. 附圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，$\angle ACB = 90°$，$\overline{AC} = 5$、$\overline{BC} = 6$，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。



(1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體
(2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 $45°$
(3) $\angle CEB < \angle AEB$　(4) $\tan\angle AEC < \sin\angle CEB$
(5) $\angle CEB < \angle AEC$。

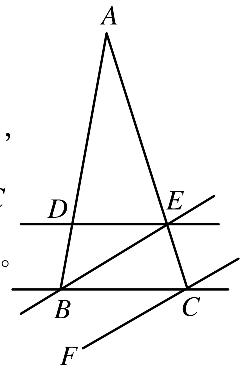
12. 設 $f(x)$、$g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $g(x)$，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。
試選出不可能是 $y = g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。
(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) 1　(3) $\sqrt{2}$　(4) 2　(5) π。

三、選填題(占 25 分)

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用1500枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為________張。

14.已知 a 、 b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\dfrac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$。

則 $a=$________，$b=$________。(化為最簡分數)



15.如圖，王家有塊三角形土地 ΔABC ，其中 $\overline{BC}=16$ 公尺。政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE ， BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的 $\dfrac{9}{16}$ 。經協商，改以開闢平行直線 BE ， FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC=30°$ ，則只需徵收 ΔBCE 區域。依此協商，王家剩餘的土地 ΔABE 有________平方公尺。

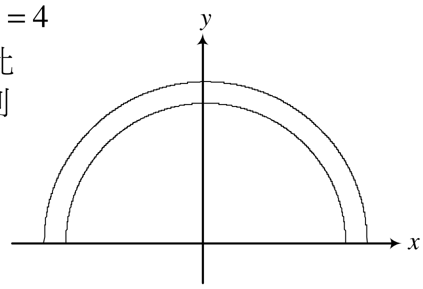
16.坐標空間中，平面 $x-y+2z=3$ 上有兩相異直線 $L:\dfrac{x}{2}-1=y+1=-2z$ 與 L' 。已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。則 E 的方程式為________。

17.坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1,2,1)$、$(-4,1,3)$、$(2,0,-3)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為________。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2+y^2=3$ 的外部與圓 $x^2+y^2=4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1:x^2+y^2=3\ (y\geq 0)$、$C_2:x^2+y^2=4\ (y\geq 0)$上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A\left(\sqrt{3},0\right)$，白端在 C_2 的點 B 。接著黑、白兩端各沿著 C_1 、 C_2 逆時針移動，直到白端碰到 C_2 的點 $B'(-2,0)$便停止掃描。



18.試問點 B 的坐標為下列哪一選項？(單選題)

(1) $(0,2)$ (2) $\left(1,\sqrt{3}\right)$ (3) $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ (4) $\left(\sqrt{3},1\right)$ (5) $(2,0)$

19.令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A',B' 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R ；並於求解區內求 $\cos\angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。

20.〈承 19 題〉令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。

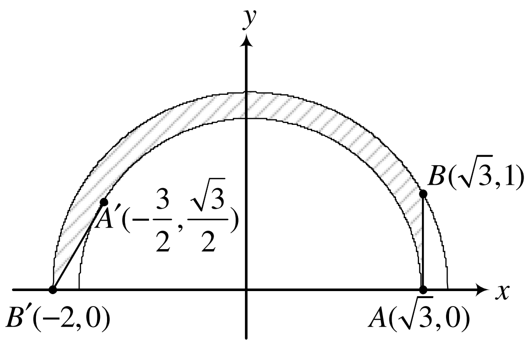
2022年大學學科能力測驗(數學A) 參考答案

選擇題：**1.**(4)　**2.**(1)　**3.**(5)　**4.**(3)　**5.**(2)　**6.**(5)　**7.**(2)(4)　**8.**(1)(4)　**9.**(3)(4)
10.(1)(2)　**11.**(2)(3)(4)　**12.**(1)(2)

選填題：**13.** 4.2　**14.** $a=2, b=\frac{1}{2}$　**15.** 192　**16.** $x-3y-2z=5$　**17.** 21

混合題：**18.** (4)

19.



$\cos\angle OA'B'=0, A'[\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}]$

20. $R=\frac{5}{12}\pi, \Omega=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$