111 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？
(1)101　(2)105　(3)115　(4)120　(5)225 。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(4)

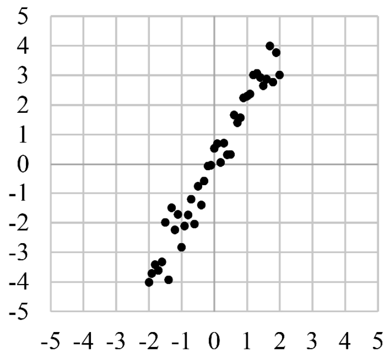
$\boxed{解}$：$C^n_2=\dfrac{n(n-1)}{2}\ge 100 \Rightarrow n\ge 15$，所求$=C^{15}_1+C^{15}_2=15+105=120$

2. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{a}\ \boxed{,}\ \boxed{b}\ \boxed{)}$。
某生在計算 $\log_a b$ 時（其中 $a>1$ 且 $b>1$）順序弄錯，誤按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{b}\ \boxed{,}\ \boxed{a}\ \boxed{)}$，
所得為正確值的 $\dfrac{9}{4}$ 倍。試選出 a 、 b 間的關係式。
(1) $a^2=b^3$　(2) $a^3=b^2$　(3) $a^4=b^9$　(4) $2a=3b$　(5) $3a=2b$ 。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(1)

$\boxed{解}$：$\log_b a=\dfrac{9}{4}\log_a b \Rightarrow (2\log a)^2=(3\log b)^2 \Rightarrow \log a^2=\log b^3 \Rightarrow a^2=b^3$

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。附圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？
(1) $y=2x$　(2) $y=-2x$　(3) $y=-x$
(4) $y=\dfrac{x}{2}$　(5) $y=-\dfrac{x}{2}$ 。



【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(5)

$\boxed{解}$：原數據呈現斜率近似 $+2$ ，故投影到斜率近似 $-\dfrac{1}{2}$ 時變異數最小

4. 設等差數列〈 a_n 〉之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。
(1) $\log d$　(2) $\log\dfrac{2}{3}$　(3) $\log\dfrac{3}{2}$　(4) $\log 2d$　(5) $\log 3d$ 。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：$\log a_1+\log(a_1+5d)=2\times\log(a_1+2d) \Rightarrow a_1(a_1+5d)=(a_1+2d)^2 \Rightarrow a_1=4d$

故公差$=\log\dfrac{a_1+2d}{a_1}=\log\dfrac{a_1+5d}{a_1+2d}=\log\dfrac{3}{2}$

5. 已知某地區有30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為80%，將未染病者判為陰性的機率則為60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為P；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為P'。試問$\dfrac{P}{P'}$最接近哪一選項？

(1)7　(2)8　(3)9　(4)10　(5)11。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(2)

$\boxed{解}$：
$$\begin{cases}有病30\% \begin{cases}判為陽性80\% \\ 判為陰性20\%\end{cases} \\ 沒病70\% \begin{cases}判為陽性40\% \\ 判為陰性60\%\end{cases}\end{cases}$$

$P=\dfrac{30\%\times20\%}{30\%\times20\%+70\%\times60\%}=\dfrac{1}{8}$，$P'=\dfrac{30\%\times(20\%)^3}{30\%\times(20\%)^3+70\%\times(60\%)^3}=\dfrac{1}{64}$

$\dfrac{P}{P'}=8$

6. 設坐標平面上兩直線L_1、L_2的斜率皆為正，且L_1、L_2有一夾角的平分線斜率為$\dfrac{11}{9}$。另一直線L通過點$\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$且與$L_1$、$L_2$所圍的有界區域為正三角形，試問$L$的方程式為下列哪一選項？

(1)$11x-9y=19$　(2)$9x+11y=25$　(3)$11x+9y=25$

(4)$27x-33y=43$　(5)$27x+33y=65$。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(5)

$\boxed{解}$：L的斜率$-\dfrac{9}{11}$，且過$\left(2,\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow 9x+11y=\dfrac{65}{3}\Rightarrow 27x+33y=65$

二、多選題（占 30 分）

7. 設整數n滿足$|5n-21|\geq7|n|$。試選出正確的選項。

(1)$|5n-7n|\geq21$　(2)$-1\leq\dfrac{7n}{5n-21}\leq1$　(3)$7n\leq5n-21$

(4)$(5n-21)^2\geq49n^2$　(5)滿足題設不等式的整數n有無窮多個。　【111 年學測數 A】

$\boxed{答}$：(2)(4)

$\boxed{解}$：$|5n-21|^2\geq|7n|^2\Rightarrow(12n-21)(2n+21)\leq0$

$\Rightarrow-\dfrac{21}{2}\leq n\leq\dfrac{7}{4}\xrightarrow{n\in Z}n=-10,-9,-8,\cdots\cdots,0,1$

8. 坐標平面上，ΔABC三頂點的坐標分別為$A(0,2)$、$B(1,0)$、$C(4,1)$，
試選出正確的選項。
(1)ΔABC的三邊中，$\overline{AC}$最長　(2)$\sin A<\sin C$　(3)ΔABC為銳角三角形
(4)$\sin B=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　(5)ΔABC的外接圓半徑比2小。　【111年學測數A】

答：(1)(4)

解：(1)$\overline{AB}=\sqrt{5}$，$\overline{BC}=\sqrt{10}$，$\overline{AC}=\sqrt{17}$（最長）

(2)$\because a>c$　$\therefore \sin A>\sin C$

(3)$\because b^2>a^2+c^2$　$\therefore$鈍角三角形

(4)$\cos B=\dfrac{10+5-17}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{50}}\Rightarrow \sin B=\dfrac{7}{\sqrt{50}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

(5)$\dfrac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{17}}{2\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}}\fallingdotseq 2.\cdots>2$

9. 已知P為ΔABC內一點，且$\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，其中$a$、$b$為相異實數。
設Q、R在同一平面上，且$\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AR}=a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}$。
試選出正確的選項。
(1)Q、R也都在ΔABC內部　(2)$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$　(3)ΔABP面積$=\Delta ACQ$面積
(4)ΔBCP面積$=\Delta BCQ$面積　(5)ΔABP面積$>\Delta ABR$面積。　【111年學測數A】

答：(3)(4)

解：$P\in\Delta ABC$內部，表$a>0$，$b>0$，$a+b<1$

(1)故Q必在ΔABC內部，但R不確定

(2)$|\overrightarrow{AP}|^2=a^2|\overrightarrow{AB}|^2+2ab\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+b^2|\overrightarrow{AC}|^2$

$|\overrightarrow{AQ}|^2=b^2|\overrightarrow{AB}|^2+2ab\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+a^2|\overrightarrow{AC}|^2$

不能確定$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$

(3)$\Delta ABP=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AP}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\b\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|=\dfrac{b}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|$

$\Delta ACQ=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AQ}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AC}\\b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AC}\\b\overrightarrow{AB}\end{matrix}\right\|=\dfrac{b}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AB}\end{matrix}\right\|$

(4)承(3)，可知$\Delta ACP=\Delta ABQ$

故$\Delta BCP=\Delta ABC-\Delta ABP-\Delta ACP=\Delta ABC-\Delta ACQ-\Delta ABQ=\Delta BCQ$

(5)$\Delta ABR=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AR}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|$

$=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\(b-0.05)\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|=\dfrac{|b-0.05|}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\|$

不確定ΔABP與ΔABR之大小

10.給定一實係數三次多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$。令$g(x)=f(-x)-3$，已知$y=g(x)$圖形的對稱中心為$(1,0)$且$g(-1)<0$。試選出正確的選項。
(1) $g(x)=0$有三相異整數根　　(2) $a<0$
(3) $y=f(x)$圖形的對稱中心為$(-1,-3)$　　(4) $f(100)<0$
(5) $y=f(x)$的圖形在點$(-1,f(-1))$附近會近似於一條斜率為a的直線。【111 年學測數 A】

答：(1)(2)

解：(1)(2) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$

$g(x)=f(-x)-3=-ax^3+bx^2-cx$，表必過$(0,0)$

又$y=g(x)$對稱中心為$(1,0)$，表亦過$(2,0)$

故$g(x)=-a(x-0)(x-1)(x-2)=-ax^3+3ax^2-2ax$

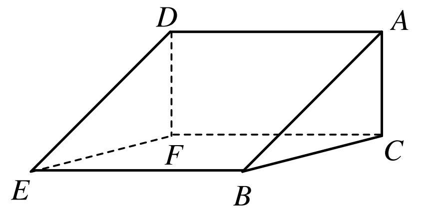
亦即$b=3a$，$c=2a \xrightarrow{g(-1)<0} a<0$

(3) $f(x)=ax^3+3ax^2+2ax+3=a(x+1)^3-a(x+1)+3$，表對稱中心$(-1,3)$，

(4) 但不確定a值，所以不能確定$f(100)$正負

(5) 在$(-1,f(-1))$處一次近似$y=-a(x+1)+3$

11.附圖為一個積木的示意圖，其中ABC為一直角三角形，$\angle ACB=90°$，$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=6$，且$ADEB$與$ADFC$皆為矩形。試選出正確的選項。



(1)將此積木沿平面ACE切下，可切得兩個四面體
(2)平面$ADEB$與$ADFC$所夾銳角大於$45°$
(3) $\angle CEB<\angle AEB$
(4) $\tan\angle AEC<\sin\angle CEB$
(5) $\angle CEB<\angle AEC$。【111 年學測數 A】

答：(2)(3)(4)

解：(1)應得一四角錐，一三角錐（四面體）

(2)由兩面角定義，夾角$\sin\angle BAC=\dfrac{5}{\sqrt{61}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin 45°$，故$\angle BAC>45°$

(3) $\cos\angle CEB=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}>\cos\angle AEB=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \angle CEB<\angle AEB$

(4) $\tan\angle AEC=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}<\sin\angle CEB=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$

(5) $\sin\angle AEC=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}<\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}=\sin\angle CEB \Rightarrow \angle AEC<\angle CEB$

12.設$f(x)$、$g(x)$皆為實係數多項式，其中$g(x)$是首項係數為正的二次式。
已知$(g(x))^2$除以$f(x)$的餘式為$g(x)$，且$y=f(x)$的圖形與x軸無交點。
試選出不可能是$y=g(x)$圖形頂點的y坐標之選項。

(1)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2)1　(3)$\sqrt{2}$　(4)2　(5)π。　【111 年學測數 A】

答：(1)(2)

解：$[g(x)]^2=f(x)Q(x)+g(x) \Rightarrow g(x)[g(x)-1]=f(x)Q(x)$

$\because y=f(x)$與x軸無交點且$g(x)$領導係數為正　$\therefore$(1)(2)不可能

三、選填題（占 25 分）

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用1500枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為2%，在第十次為10%。今某生有代幣23000枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為________張。　【111 年學測數 A】

答：4.2

解：$\left[\dfrac{23000}{1500}\right]=[15.3\cdots]=15$　　$E(X)=\left[9\times\dfrac{2}{100}+1\times\dfrac{10}{100}\right]\times 15=4.2$

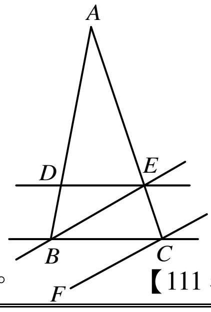
14. 已知a、b為實數，且方程組$\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\dfrac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$。

則$a=$________，$b=$________。(化為最簡分數)　【111 年學測數 A】

答：$a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$

解：
$$\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\dfrac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \\ x+2y+bz=7 \\ by+5z=-5 \\ bz=0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} z=0 \\ 3x+8y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}} \begin{cases} x=27 \\ y=-10 \\ z=0 \\ a=2 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

15. 如圖，王家有塊三角形土地ΔABC，其中$\overline{BC}=16$公尺。政府擬徵收其中梯形$DBCE$部分，開闢以直線DE，BC為邊線的馬路，其路寬為h公尺，這讓王家土地只剩原有面積的$\dfrac{9}{16}$。經協商，改以開闢平行直線BE，FC為邊線的馬路，且路寬不變，其中$\angle EBC=30°$，則只需徵收ΔBCE區域。依此協商，王家剩餘的土地ΔABE有________平方公尺。　【111 年學測數 A】



答：192

解：$\because d\left(\overline{DE},\overline{BC}\right)=d\left(\overline{BE},\overline{FC}\right)$ $\quad\therefore \Delta BCE$ 為等腰Δ

$\Rightarrow \overline{BC}=\overline{BE}=16$，$\angle EBC=30^\circ$，$d\left(\overline{DE},\overline{BC}\right)=8$

$\Delta ADE=\dfrac{9}{16}\Delta ABC \ \Rightarrow \overline{DE}=\dfrac{3}{4}\overline{BC}=12$

ΔABC 面積 $=\left(12+16\right)\times 8\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{7}=256$

ΔABE 面積 $=256-\dfrac{1}{2}\times16\times16\times\sin 30^\circ=192$

16. 坐標空間中，平面 $x-y+2z=3$ 上有兩相異直線 $L:\dfrac{x}{2}-1=y+1=-2z$ 與 L'。已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。則 E 的方程式為________。

【111 年學測數 A】

答：$x-3y-2z=5$

解：L：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-\frac{1}{2}}$，$P\left(2,-1,0\right)\in L$，$\overrightarrow{L}=\left(4,2,-1\right)$

F：$x-y+2z=3$，$\overrightarrow{F}=\left(1,-1,2\right)$

$\overrightarrow{E}\,/\!/\,\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{F}=\left(3,-9,-6\right)/\!/\left(1,-3,-2\right)$，$P\in E$，故 E：$x-3y-2z=5$

17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $\left(-1,2,1\right)$、$\left(-4,1,3\right)$、$\left(2,0,-3\right)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為________。

【111 年學測數 A】

答：21

解：$A\left(-1,2,1\right)$、$B\left(-4,1,3\right)$、$C\left(2,0,-3\right)$、$D\left(\cos\theta,\sin\theta,0\right)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(-3,-1,2\right)\times\left(3,-2,-4\right)=\left(8,-6,9\right)$

故平面 ABC：$8x-6y+9z+11=0$ 且 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{181}$

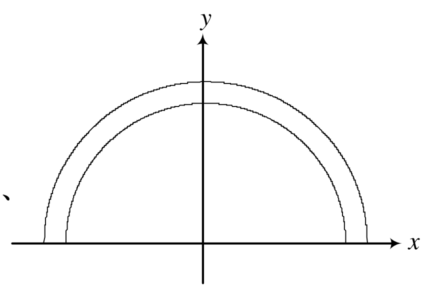
$d\left(D,\text{平面}ABC\right)=\dfrac{\left|8\cos\theta-6\sin\theta+11\right|}{\sqrt{181}}\le\dfrac{\left|10+11\right|}{\sqrt{181}}=\dfrac{21}{\sqrt{181}}$

所求最大體積 $=\sqrt{181}\times\dfrac{21}{\sqrt{181}}=21$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2+y^2=3$ 的外部與圓 $x^2+y^2=4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2+y^2=3\ (y\ge 0)$、$C_2: x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A\left(\sqrt{3},0\right)$，白端在 C_2 的點 B。接著黑、白兩端各沿著



C_1、C_2逆時針移動，直到白端碰到C_2的點$B'(-2,0)$便停止掃描。

18. 試問點B的坐標為下列哪一選項？（單選題）
(1)$(0,2)$　(2)$(1,\sqrt{3})$　(3)$(\sqrt{2},\sqrt{2})$　(4)$(\sqrt{3},1)$　(5)$(2,0)$
【111 年學測數 A】

答：(4)

解：$A(\sqrt{3},0)$，$B(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\overline{AB}=1 \Rightarrow \overline{AB}^2=1$

$\Rightarrow (2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta)^2=1 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

則$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$表$B(\sqrt{3},1)$

19. 令O為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為A',B'。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域R；並於求解區內求$\cos\angle OA'B'$及點A'的極坐標。
【111 年學測數 A】

答：$\cos\angle OA'B'=0$，$A'\left[\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

解：$B'(-2,0)$，$A'(\sqrt{3}\cos\phi,\sqrt{3}\sin\phi)$，$\overline{A'B'}=1 \Rightarrow \overline{A'B'}^2=1$

$\Rightarrow (\sqrt{3}\cos\varphi+2)^2+(\sqrt{3}\sin\varphi)^2=1 \Rightarrow \cos\phi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

則$\sin\phi=\dfrac{1}{2}$，表$A'\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

故極坐標表示法$A'\left[\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，$B'[2,\pi]$

而$\overline{OA'}=\sqrt{3}$，$\overline{OB'}=2$，$\overline{A'B'}=1$，$\angle OA'B'=90° \Rightarrow \cos\angle OA'B'=0$

20. 〈承 19 題〉令Ω表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求Ω與R的面積。
【111 年學測數 A】

答：$R=\dfrac{5}{12}\pi$，$\Omega=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$

解：$\Omega=[\text{扇形}O-\overset{\frown}{BY}]+[\Delta O-AB]-[\text{扇形}-O-\overset{\frown}{AY}]$

$=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\times\sin30°-\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$

$R-\Omega=[\text{扇形}O-\overset{\frown}{B'Y}]-[\text{扇形}O-\overset{\frown}{A'Y}]-[\Delta O-A'B']$

$=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\times\sin30°=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故$R=\dfrac{5}{12}\pi$