111 學年度分科測驗數學甲

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 設a_1,a_2,a_3,a_4是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令$b=\sum_{n=1}^{3}\log_{a_n} a_{n+1}$，試選出正確的選項。(1) $2<b\le 3$ (2) $3<b\le 4$ (3) $4<b\le 5$ (4) $5<b\le 6$ (5) $6<b\le 7$

2. 設 c 為實數使得三元一次方程組$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+cy+3z=1 \\ 3x-3y+cz=0 \end{cases}$無解。試選出 c 之值。

   (1) -3 (2) -2 (3) 0 (4) 2 (5) 3

3. 坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且$\overline{OP}=1$。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為45°，且 P 點到 y 軸的距離為$\frac{\sqrt{6}}{3}$。試選出點 P 的 z 坐標。

   (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、多選題(占 40 分)

4. 設多項式$f(x)=x^3+2x^2-2x+k$ 、 $g(x)=x^2+ax+1$，其中 k, a 為實數。已知$g(x)$整除$f(x)$，且方程式$g(x)=0$有虛根。試選出為方程式$f(x)=0$的根之選項。

   (1) -3 (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ (5) $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

5. 坐標平面上有一圖形Γ，其方程式為$(x-1)^2+(y-1)^2=101$。試選出正確的選項。

   (1) Γ與 x 軸負向、y 軸負向分別交於$(-9,0)$、$(0,-9)$

   (2) Γ上 x 坐標最大的點是點$(11,0)$ (3) Γ上的點與原點距離的最大值為$\sqrt{2}+\sqrt{101}$

   (4) Γ在第三象限的點之極坐標可用$[9,\theta]$表示，其中$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

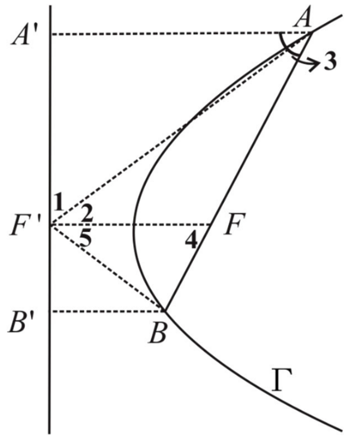
   (5) Γ經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

6. 假設 2 階方陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$分別映射到 $O(0,0), A'(3,\sqrt{3})$, $B'(-\sqrt{3},3)$，並將與原點距離為 1 的點$C(x,y)$映射到點$C'(x',y')$。試選出正確的選項。

   (1) 行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=6$ (2) $\overline{OC'}=2\sqrt{3}$ (3) $\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OC'}$的夾角為60°

   (4) 有可能$y=y'$ (5) 若$x<y$則$x'<y'$

7. 假設 A, B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F。設 A, F, B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A', F', B'。試選出等於 $\dfrac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$ 的選項。(注意：此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係並不正確)



(1) $\tan\angle 1$，其中 $\angle 1=\angle A'F'A$

(2) $\sin\angle 2$，其中 $\angle 2=\angle AF'F$

(3) $\sin\angle 3$，其中 $\angle 3=\angle A'AF$

(4) $\cos\angle 4$，其中 $\angle 4=\angle F'FB$

(5) $\tan\angle 5$，其中 $\angle 5=\angle FF'B$

8. 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$。已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6$，試選出正確的選項。

(1) $b_n<6-\dfrac{4n-1}{n}$ (2) $b_n>\dfrac{4n-1}{2n}$ (3) 數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散

(4) $a_{10000}<6.1$ (5) $a_{10000}>5.9$

三、選填題(占 18 分)

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。
我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X)$=______________。(四捨五入到整數位)

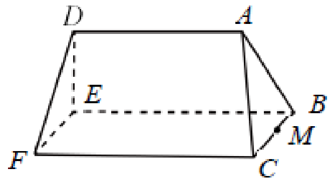
10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這 4 天，發完國、英、數、社、自共 5 張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依此要求，學藝共有_________種安排方式。

11. 在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left|\dfrac{-3+4i}{5}-z^3\right|=\left|\dfrac{-3+4i}{5}-z\right|$，其中 $i=\sqrt{-1}$。若 z 的實部為 a、虛部為 b，則 a=__________、b=___________。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

有一積木(如圖)，其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形，$BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P。已知 $\overline{AD}$ $\overline{CF}=40$ 、 $\overline{AP}=15$ 且 $\overline{BC}=10$ 。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。試回答下列問題。



12. 利用 $\overline{AD}$ 在平面 $BCFE$ 的投影長為 30，可得 $\tan\angle AMP=$________。(選填題，2 分)

13. 令 Q 為 $\overline{FC}$ 上一點，滿足 $\overrightarrow{AQ}$ 與 $\overrightarrow{DF}$ 平行。利用$\triangle ABC$、$\triangle ACQ$ 為全等三角形，證明若水平面 W 介於 A, P 之間且與 A 的距離為 x，則 W 與此積木所截的矩形區域之面積為 $20x+\frac{4}{9}x^2$ 。(非選擇題，4 分)

14. 將線段 $\overline{AP}$ 的 n 等分點沿著向量 $\overrightarrow{AP}$ 的方向依序設為 $A=P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n=P$ 。在每一個分段 $\overline{P_{k-1}P_k}$ ，考慮以通過 P_k 的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$ 為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和(不需化簡)，且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}|+|\vec{b}|=9$ 以及 $|\vec{a}-\vec{b}|=7$ 。若令 $|\vec{a}|=x$ ，其中 $1<x<8$ ，且令 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角為 θ ，則利用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}-\vec{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos\theta$ 以 x 表示成 $\frac{c}{9x-x^2}+d$ ，其中 c、d 為常數且 $c>0$ 。令此表示式為 $f(x)$ ，且其定義域為 $\{x \mid 1<x<8\}$ 。試回答下列問題。

15. 求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題，4 分)

16. 說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角 θ 最大。(非選擇題，4 分)

17. 利用 $f(x)$ 的一次估計(一次近似)，求當 $x=4.96$ 時， $\cos\theta$ 約為多少？(非選擇題，4 分)

2022年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：**1.**(3) **2.**(2) **3.**(4) **4.**(1)(4) **5.**(1)(3)(5) **6.**(2)(4) **7.**(3)(5) **8.**(2)(5)

選填題：**9.** 14 **10.** 42 **11.** $a=\frac{\sqrt{5}}{5}, b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

混合題或非選擇題：**12.** 3 **13.** 略 **14.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{15}{n}\left[20\frac{k}{n}+\frac{4}{9}(\frac{k}{n})^2\right]$；2750(立方單位)

15. $f(x)=\frac{16}{x(9-x)}-1$；$f'(x)=\frac{32x-144}{(9x-x^2)^2}$

16. $\frac{9}{2}\le x<8$時，遞增；$1<x\le\frac{9}{2}$時，遞減；當$x=\frac{9}{2}$時，夾角θ為最大

17. $-\frac{126}{625}=-0.2016$