

111 學年度分科測驗數學甲

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 設 a_1, a_2, a_3, a_4 是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令 $b = \sum_{n=1}^3 \log_{a_n} a_{n+1}$ ，試選出正確的選項。(1) $2 < b \leq 3$ (2) $3 < b \leq 4$ (3) $4 < b \leq 5$ (4) $5 < b \leq 6$ (5) $6 < b \leq 7$

2. 設 c 為實數使得三元一次方程組 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + cy + 3z = 1 \\ 3x - 3y + cz = 0 \end{cases}$ 無解。試選出 c 之值。
(1) -3 (2) -2 (3) 0 (4) 2 (5) 3

3. 坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且 $\overline{OP} = 1$ 。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為 45° ，且 P 點到 y 軸的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。試選出點 P 的 z 坐標。
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、多選題(占 40 分)

4. 設多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + k$ 、 $g(x) = x^2 + ax + 1$ ，其中 k, a 為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$ ，且方程式 $g(x) = 0$ 有虛根。試選出為方程式 $f(x) = 0$ 的根之選項。

- (1) -3 (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ (5) $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

5. 坐標平面上有一圖形 Γ ，其方程式為 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ 。試選出正確的選項。

- (1) Γ 與 x 軸負向、 y 軸負向分別交於 $(-9, 0)$ 、 $(0, -9)$
(2) Γ 上 x 坐標最大的點是點 $(11, 0)$ (3) Γ 上的點與原點距離的最大值為 $\sqrt{2} + \sqrt{101}$
(4) Γ 在第三象限的點之極坐標可用 $[9, \theta]$ 表示，其中 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
(5) Γ 經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

6. 假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$ 、 $A'(3, \sqrt{3})$ 、 $B'(-\sqrt{3}, 3)$ ，並將與原點距離為 1 的點 $C(x, y)$ 映射到點 $C'(x', y')$ 。試選出正確的選項。

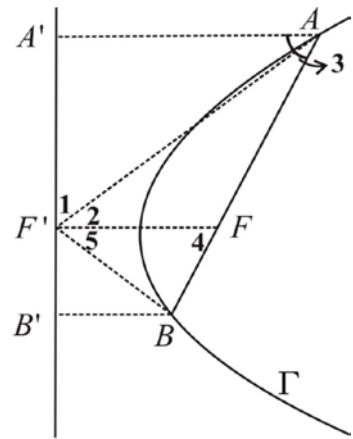
- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ (2) $\overline{OC'} = 2\sqrt{3}$ (3) \overrightarrow{OC} 與 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 60°
(4) 有可能 $y = y'$ (5) 若 $x < y$ 則 $x' < y'$

7. 假設 A, B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F 。設 A, F, B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A', F', B' 。

試選出等於 $\frac{\overline{A'F'}}{A'A}$ 的選項。(注意：此示意圖僅說明各點的

相關位置，各點間距離關係並不正確)

- (1) $\tan \angle 1$ ，其中 $\angle 1 = \angle A'F'A$
 (2) $\sin \angle 2$ ，其中 $\angle 2 = \angle AF'F$
 (3) $\sin \angle 3$ ，其中 $\angle 3 = \angle A'AF$
 (4) $\cos \angle 4$ ，其中 $\angle 4 = \angle F'FB$
 (5) $\tan \angle 5$ ，其中 $\angle 5 = \angle FF'B$



8. 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。

- (1) $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$ (2) $b_n > \frac{4n-1}{2n}$ (3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 有可能發散
 (4) $a_{10000} < 6.1$ (5) $a_{10000} > 5.9$

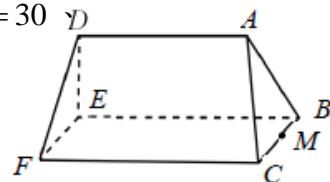
三、選填題(占 18 分)

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(四捨五入到整數位)
10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這 4 天，發完國、英、數、社、自共 5 張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依此要求，學藝共有 種安排方式。
11. 在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left| \frac{-3+4i}{5} - z^3 \right| = \left| \frac{-3+4i}{5} - z \right|$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。若 z 的實部為 a 、虛部為 b ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

有一積木(如圖)，其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形， $BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P 。已知 $\overline{AD} = 30$ ， $\overline{CF} = 40$ 、 $\overline{AP} = 15$ 且 $\overline{BC} = 10$ 。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。試回答下列問題。



12. 利用 \overline{AD} 在平面 $BCFE$ 的投影長為 30，可得 $\tan \angle AMP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(選填題，2 分)

13. 令 Q 為 \overline{FC} 上一點，滿足 \overrightarrow{AQ} 與 \overrightarrow{DF} 平行。利用 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACQ$ 為全等三角形，證明若水平面 W 介於 A, P 之間且與 A 的距離為 x ，則 W 與此積木所截的矩形區域之面積為 $20x + \frac{4}{9}x^2$ 。(非選擇題，4 分)

14. 將線段 \overline{AP} 的 n 等分點沿著向量 \overrightarrow{AP} 的方向依序設為 $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = P$ 。在每一個分段 $\overline{P_{k-1}P_k}$ ，考慮以通過 P_k 的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$ 為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和(不需化簡)，且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量 \vec{a} 、 \vec{b} 滿足 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9$ 以及 $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ 。若令 $|\vec{a}| = x$ ，其中 $1 < x < 8$ ，且令 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，則利用向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos \theta$ 以 x 表示成 $\frac{c}{9x - x^2} + d$ ，其中 c 、 d 為常數且 $c > 0$ 。令此表示式為 $f(x)$ ，且其定義域為 $\{x | 1 < x < 8\}$ 。試回答下列問題。

15. 求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題，4 分)

16. 說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角 θ 最大。(非選擇題，4 分)

17. 利用 $f(x)$ 的一次估計(一次近似)，求當 $x = 4.96$ 時， $\cos \theta$ 約為多少？(非選擇題，4 分)

2022年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：1.(3) 2.(2) 3.(4) 4.(1)(4) 5.(1)(3)(5) 6.(2)(4) 7.(3)(5) 8.(2)(5)

選填題：9. 14 10. 42 11. $a = \frac{\sqrt{5}}{5}, b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

混合題或非選擇題：12. 3 13. 略 14. $\sum_{k=1}^n \frac{15}{n} \left[20 \frac{k}{n} + \frac{4}{9} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]$; 2750(立方單位)

$$15. f(x) = \frac{16}{x(9-x)} - 1 ; f'(x) = \frac{32x-144}{(9x-x^2)^2}$$

16. $\frac{9}{2} \leq x < 8$ 時，遞增； $1 < x \leq \frac{9}{2}$ 時，遞減；當 $x = \frac{9}{2}$ 時，夾角 θ 為最大

$$17. -\frac{126}{625} = -0.2016$$