111 年大學入學學力測驗數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

1. 試問有多少個整數 x 滿足 $2|x|+x<10$？
(1)13個　(2)14個　(3)15個　(4)16個　(5)無窮多個。　【111 年學測數 B】

答：(1)

解：$2|x|+x<10$，$x\in Z$

若 $x\ge 0 \Rightarrow 3x<10 \Rightarrow x<\frac{10}{3}$，取 $0\le x<\frac{10}{3}$

若 $x<0 \Rightarrow -x<10 \Rightarrow x>-10$，取 $-10<x<0$

綜合上述：$-10<x<\frac{10}{3}$，$x\in Z$

$\Rightarrow x=-9,-8,-7,\cdots,-1,0,1,2,3$

解：$|2x|<10-x$，$x\in Z \Rightarrow (2x)^2-(10-x)^2<0 \Rightarrow (x-10)(3x-10)<0$，$x\in Z$

$\Rightarrow -10<x<\frac{10}{3}$，$x\in Z \Rightarrow x=-9,-8,-7,\cdots,-1,0,1,2,3$

2. 某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：
藍-白-紅-白-藍-白-紅-白-藍-白-紅-白…，每四次一循環，其中藍光每次持續5秒，白光每次持續2秒，而紅光每次持續6秒。假設換燈號的時間極短可被忽略，試選出啟動後第99至101秒之間的燈號。
(1)皆為藍燈　(2)皆為白燈　(3)皆為紅燈
(4)先亮藍燈再亮白燈　(5)先亮白燈再亮紅燈。　【111 年學測數 B】

答：(3)

解：完整週期$(5+2+6+2)=15$秒

$99=15\times6+(5+2+[2])$，$101=15\times6+(5+2+[4])$

3. 有八棟大廈排成一列，由左至右分別編號$1,2,3,4,5,6,7,8$。今電信公司想選取其中三棟大廈的屋頂分別設立一座電信基地台。若基地台不能設立於相鄰的兩棟大廈，以免訊號互相干擾，試問在3號大廈不設立基地台的情況下，有多少種設立基地台的選取方法？
(1)12　(2)13　(3)20　(4)30　(5)35。　【111 年學測數 B】

答：(2)

解：$C^2_1C^4_2+C^3_3=12+1=13$

4. 在坐標平面上，已知向量$\overrightarrow{PQ}=\left(\log\frac{1}{5},-10^{-5}\right)$，其中點 P 的坐標為$\left(\log\frac{1}{2},2^{-5}\right)$。
試選出正確的選項。
(1)點 Q 在第一象限　(2)點 Q 在第二象限　(3)點 Q 在第三象限
(4)點 Q 在第四象限　(5)點 Q 位於坐標軸上。　【111 年學測數 B】

答：(2)

$\boxed{解}$：$Q(x,y)=\left(\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{5},2^{-5}-10^{-5}\right)=\left(\log\frac{1}{10},\frac{1}{32}-\frac{1}{10^5}\right)=(-,+)$

5. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，若$A^7-3A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則$a+b+c+d$之值為下列哪一個選項？
(1)-8　(2)-5　(3)5　(4)8　(5)10。【111 年學測數 B】

$\boxed{答}$：(5)

$\boxed{解}$：$A=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos45° & -\sin45°\\ \sin45° & \cos45°\end{bmatrix}\Rightarrow A^7=8\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$A^7-3A=\begin{bmatrix}8 & 8\\ -8 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -11 & 11\end{bmatrix}$

6. 假設地球為一半徑r的球體，有一質點自甲地沿著該地所在經線往北移動，抵達北極點時移動所經過的弧線之長度為$\frac{7}{12}\pi r$。試問哪一個選項最可能是甲地的位置？
(1)東經$75°$、北緯$15°$　(2)東經$30°$、南緯$75°$　(3)東經$75°$、南緯$15°$
(4)西經$30°$、北緯$75°$　(5)西經$15°$、南緯$30°$。【111 年學測數 B】

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：$r\theta=\frac{7}{12}\pi r\Rightarrow\theta=\frac{7}{12}\pi$，故為南緯$15°$

7. 畫家把空間景物用單點透視法畫在平面的畫紙上時，有以下原則要遵守：
一、空間中的直線畫在畫紙上必須是一條直線。
二、空間直線上點的相關位置必須和畫紙所畫的點的相關位置一致。
三、空間直線上的任四個相異點的K值，和畫紙所畫的四個點之K值必須相同，
其中K值的定義如下：直線上任給四個有順序的相異點P_1,P_2,P_3,P_4，如附圖。

其所對應的K值定義為$K=\frac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_2P_4}}$。
今某畫家依照以上原則，將空間中一直線及該線上的四相異點Q_1,Q_2,Q_3,Q_4描繪在畫紙上，其中$\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_2Q_3}=\overline{Q_3O_4}$。若將畫紙上所畫的直線視為一數線，並將線上的點用坐標來表示，則在下列選項的四個坐標中，試問哪一組最可能是該四點在畫紙上的坐標？
(1)$1,2,4,8$　(2)$3,4,6,9$　(3)$1,5,8,9$　(4)$1,2,4,9$　(5)$1,7,9,10$。【111 年學測數 B】

$\boxed{答}$：(5)

解：$\dfrac{\overline{Q_1Q_4}\times\overline{Q_2Q_3}}{\overline{Q_1Q_3}\times\overline{Q_2Q_4}}=\dfrac{3\times1}{2\times2}=K=\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_2P_4}}=\dfrac{9\times2}{4\times3}$

二、多選題（占 **25** 分）

8. 有一射擊遊戲，將發射台設置於坐標平面的原點，並放置三個半徑為1的圓盤靶子，其圓心分別為$(2,2)$、$(4,6)$與$(8,1)$。玩家選定一正數a，並按下按鈕後，發射台將向點$(1,a)$方向發射一道雷射光束（形成一射線）。假設雷射光束擊中靶子後可以穿透並繼續沿原方向前進（削過圓盤邊緣也視為擊中）。試選出正確的選項。
(1)雷射光束落在通過原點且斜率為a的直線上
(2)若$a=\dfrac{3}{2}$，則雷射光束會擊中圓心為$(4,6)$的圓盤靶子
(3)玩家可以僅發射一道雷射光束就擊中三個圓盤靶子
(4)玩家至少需要發射三道雷射光束才可擊中三個圓盤靶子
(5)玩家發射一道雷射光束後，若擊中圓心為$(8,1)$的圓盤靶子，則$a\le\dfrac{16}{63}$。
【111 年學測數 B】

答：(1)(2)(5)

解：(1)方向向量$(1,a)$，斜率$\dfrac{a}{1}$
(2) $y=\dfrac{3}{2}x$過$(x-4)^2+(y-6)^2=1$圓心，有相交
(3)(4)至少二道雷射光
(5) $y=ax$與$(x-8)^2+(y-1)^2=1$相切 $\Rightarrow a=0$或$\dfrac{16}{63}$

9. 設$f(x)=2x^3-3x+1$，下列關於函數$y=f(x)$的圖形之描述，試選出正確的選項。
(1) $y=f(x)$的圖形通過點$(1,0)$
(2) $y=f(x)$的圖形與x軸只有一個交點
(3)點$(1,0)$是$y=f(x)$的圖形之對稱中心
(4) $y=f(x)$的圖形在對稱中心附近會近似於一直線$y=3x-3$
(5) $y=3x^3-6x^2+2x$的圖形可由$y=f(x)$的圖形經適當平移得到。
【111 年學測數 B】

答：(1)

解：(1) $(1,0)\in y=f(x)=2x^3-3x+1$
(2) $f(x)=(x-1)\left(2x^2+2x-1\right)=0 \Rightarrow x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$共三解
(3)對稱中心$(0,1)$
(4)所求一次近似為$y=-3x+1$
(5) $y=3x^3-6x^2+2x$與$y=f(x)$大域顯然不同

10. 甲、乙兩班各有40位同學參加某次數學考試（總分為100分），考試後甲、乙兩班分別以 $y_1 = 0.8x_1 + 20$ 和 $y_2 = 0.75x_2 + 25$ 的方式來調整分數，其中 x_1、x_2 分別代表甲、乙兩班的原始考試分數，y_1、y_2 分別代表甲、乙兩班調整後的分數。已知調整後兩班的平均分數均為60分，調整後的標準差分別為16分和15分。試選出正確的選項。
(1)甲班每位同學調整後的分數均不低於其原始分數
(2)甲班原始分數的平均分數比乙班原始分數的平均分數高
(3)甲班原始分數的標準差比乙班原始分數的標準差高
(4)若甲班 A 同學調整後的分數比乙班 B 同學調整後的分數高，
則 A 同學的原始分數比 B 同學的原始分數高
(5)若甲班調整後不及格（小於60分）的人數比乙班調整後不及格的人數多，則甲班原始分數不及格的人數必定比乙班原始分數不及格的人數多。 【111年學測數B】

答：(1)(2)(4)

解：(1) $y_1 - x_1 = (0.8x_1 + 20) - x_1 = 20 - 0.2x_1 \ge 0 \Rightarrow x_1 \le 100$

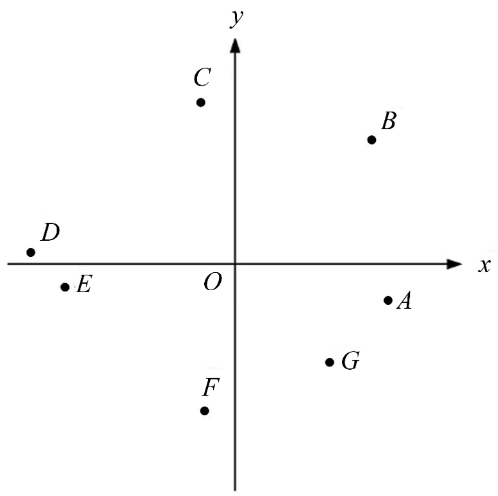
(2) $60 = 0.8\overline{X_1} + 20 \Rightarrow \overline{X_1} = 50$，$60 = 0.75\overline{X_2} + 25 \Rightarrow \overline{X_2} = 46\frac{2}{3}$

(3) $16 = 0.8S_{x_1} \Rightarrow S_{x_1} = 20$，$15 = 0.75S_{x_2} \Rightarrow S_{x_2} = 20$

(4) $y_1 - y_2 = (0.8x_1 + 20) - (0.75x_2 + 25) > 0 \Rightarrow 16x_1 > 15x_2 + 100 > 16x_2$
$\Rightarrow x_1 > x_2$

(5)無法確定

11. 考慮坐標平面上的點 $O(0,0)$、A、B、C、D、E、F、G，如圖所示：



其中 B 點、C 與 D 點、E 與 F 點、G 與 A 點依序在一、二、三、四象限內。若 $\vec{v}$ 為坐標平面上的向量，且滿足 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA} > 0$ 及 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB} > 0$，則 $\vec{v}$ 與下列哪些向量的內積一定小於0？
(1) $\overrightarrow{OC}$ (2) $\overrightarrow{OD}$ (3) $\overrightarrow{OE}$ (4) $\overrightarrow{OF}$ (5) $\overrightarrow{OG}$。 【111年學測數B】

答：(2)(3)

解：$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA} > 0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB} > 0$，表 $\vec{v}$ 與 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 均夾銳角
$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OX} < 0$，表 $\vec{v}$ 與 $\overrightarrow{OX}$ 夾鈍角 $\Rightarrow X = D$、E

12. 設 a 、 b 、 c 都是非零的實數，且二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根都落在 1 和 3 之間。試選出兩根必定都落在 4 和 5 之間的方程式。

(1) $a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$　　(2) $a(x+2)^2+b(x+2)+c=0$

(3) $a(2x-7)^2+b(2x-7)+c=0$　　(4) $a\left(\dfrac{x+7}{2}\right)^2+b\left(\dfrac{x+7}{2}\right)+c=0$

(5) $a(3x-11)^2+b(3x-11)+c=0$ 。【111 年學測數 B】

答：(3)(5)

解：$1<x<3 \Rightarrow \begin{cases}(3)\ 1<2x_3-7<3 \Rightarrow 4<x_3<5 \\ (5)\ 1<3x_5-11<3 \Rightarrow 4<x_5<\dfrac{14}{3}\end{cases}$

三、選填題（占 25 分）

13. 若 x, y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}}y^2$ 及 $2\log y=1$ ，則 $\dfrac{x-y^2}{10}=$________ 。【111 年學測數 B】

答：99

解：$2\log y=1 \Rightarrow y=10^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{-1}{3}}y^2=1 \Rightarrow x^{\frac{-1}{3}}=\dfrac{1}{10} \Rightarrow x=10^3$

所求：$\dfrac{10^3-10^1}{10}=99$

14. 坐標平面上有一個半徑為 7 的圓，其圓心為 O 點。已知圓上有 A, B 兩點，且 $\overline{AB}=8$ ，則內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$________ 。【111 年學測數 B】

答：17

解：$\cos\angle AOB=\dfrac{7^2+7^2-8^2}{2\times7\times7}=\dfrac{17}{49}$ ，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=7\times7\times\cos\angle AOB=17$

15. 根據某國對失蹤輕航機的調查得知：失蹤輕航機中有 70% 後來會被找到，在被找到的輕航機當中，有 60% 裝設緊急定位傳送器；而沒被找到的失蹤輕航機當中，則有 90% 未裝設緊急定位傳送器。緊急定位傳送器會在飛機失事墜毀時發送訊號，讓搜救人員可以定位。現有一架輕航機失蹤，若已知該機有裝設緊急定位傳送器，則它會被找到的機率為________。(化為最簡分數)【111 年學測數 B】

答：$\dfrac{14}{15}$

解：$\begin{cases} \text{被找到}\frac{70}{100}\begin{cases}\text{有裝定位器}\frac{60}{100}\\ \text{未裝定位器}\frac{40}{100}\end{cases} \\ \text{未找到}\frac{30}{100}\begin{cases}\text{有裝定位器}\frac{10}{100}\\ \text{未裝定位器}\frac{90}{100}\end{cases}\end{cases}$ $\dfrac{\frac{70}{100}\times\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}\times\frac{60}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{10}{100}}=\dfrac{14}{15}$

16. 袋中裝有藍綠黃三種顏色的球共10顆。今從袋中隨機抽取兩顆球(每顆球被抽中的機率相等)，若抽出的兩顆球皆為藍色的機率為 $\frac{1}{15}$ ，皆為綠色的機率為 $\frac{2}{9}$ ，則從袋中隨機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為________。(化為最簡分數) 【111 年學測數 B】

答：$\frac{31}{45}$

解：$\dfrac{C_2^a}{C_2^{10}}=\dfrac{1}{15}$ $\Rightarrow a=3$(藍)，$\dfrac{C_2^b}{C_2^{10}}=\dfrac{2}{9}$ $\Rightarrow b=5$(綠)，故黃球有 2 個

$$\frac{C_1^3C_1^5+C_1^5C_1^2+C_1^2C_1^3}{C_2^{10}}=\frac{15+10+6}{45}=\frac{31}{45}$$

17. 有三女三男共六位在校時和老師常有互動的同學，畢業後老師邀聚餐，餐後七人站一橫排照相留念。已知同學中有一女一男兩位曾有過不愉快，照相時不想相鄰，而老師站在正中間且三位男生不完全站在老師的同一側，則可能的排列方式共有________種。 【111 年學測數 B】

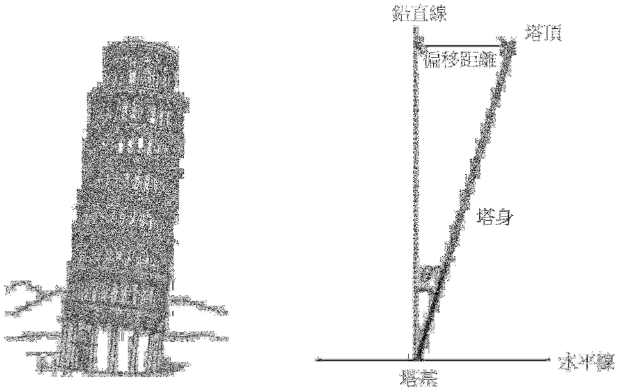
答：456

解：$\underbrace{\underbrace{6!}_{\text{任意排}}-\underbrace{3!}_{\text{男全相鄰}}\times\underbrace{3!}_{\text{女全相鄰}}\times\underbrace{2}_{\text{左右互換}}}_{\text{三男不在老師同一側}}-\underbrace{[5!-4!]\times 2!}_{\text{特定男女相鄰}}=648-192=456$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

瘦長的塔因為年代久遠，塔身容易傾斜。在下方右圖中，以粗黑線條代表塔身，而塔身的長度稱為**塔高**，塔身與鉛直虛線的夾角$\theta°$稱為該塔的**傾斜度**($0°\le\theta\le 90°$)，又塔頂至鉛直虛線的距離稱為該塔的**偏移距離**。根據上述資料，回答下列問題。



18. 已知世界上傾斜度最大的摩天大樓坐落於阿布達比，其**傾斜度**達到$18°$，此**傾斜度**換算成弳(或弧度)為下列哪一個選項？
(1)$\dfrac{\pi}{36}$　(2)$\dfrac{\pi}{18}$　(3)$\dfrac{\pi}{20}$　(4)$\dfrac{\pi}{10}$　(5)$\dfrac{\pi}{8}$　【111 年學測數 B】

答：(4)

解：$18°\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{10}$ (弳)

19. 中國虎丘塔、護珠塔與義大利的比薩斜塔是三座著名斜塔，它們的**塔高**分別為48、19與57 (公尺)，**偏移距離**分別為2.3、2.3與4 (公尺)，塔的**傾斜度**分別記為$\theta_1°$、$\theta_2°$與$\theta_3°$。試比較θ_1、θ_2與θ_3三數的大小關係。　【111 年學測數 B】

答：$\theta_2>\theta_3>\theta_1$

解：$\left.\begin{array}{l}\sin\theta_1=\dfrac{2.3}{48}=0.04791\cdots\\ \sin\theta_2=\dfrac{2.3}{19}=0.12105\cdots\\ \sin\theta_3=\dfrac{4}{57}=0.07017\cdots\end{array}\right\}$ sin 為增函數，故$\theta_2>\theta_3>\theta_1$

20. 假設有塔高相等的兩座鐵塔，它們的**傾斜度**$\alpha°$，$\beta°$分別滿足$\sin\alpha°=\dfrac{1}{5}$與$\sin\beta°=\dfrac{7}{25}$。已知兩座鐵塔的**偏移距離**相差20公尺，試求它們的塔頂到地面之距離相差多少公尺________。　【111 年學測數 B】

答：$100\sqrt{6}-240$

解：$l\sin\beta°-l\sin\alpha°=l\left(\dfrac{7}{25}-\dfrac{1}{5}\right)=20\ \Rightarrow l=250$

所求：$l\cos\alpha°-l\cos\beta°=l\left(\dfrac{\sqrt{24}}{5}-\dfrac{24}{25}\right)=50\sqrt{24}-240$