

112 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

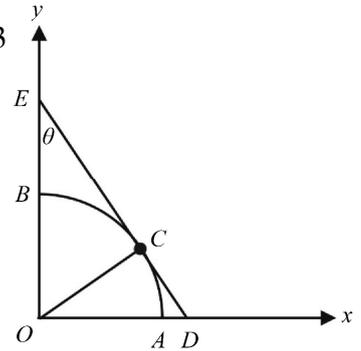
一、單選題(占 30 分)

1. 若在計算器中鍵入某正整數 N ，接著連按「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵(取正平方根)3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？

(1) 2^3 (2) 2^4 (3) 2^6 (4) 2^8 (5) 2^{12}

2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A 、 B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D 、 E ，如圖所示。令 $\angle OEC = \theta$ ，試選出為 $\tan \theta$ 的選項。

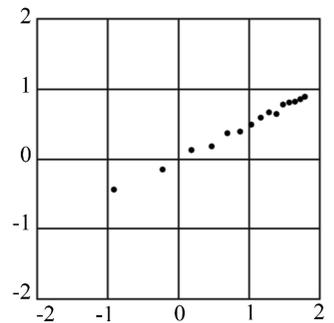
(1) \overline{OE} (2) \overline{OC} (3) \overline{OD} (4) \overline{CE} (5) \overline{CD}



3. 某生推導出兩物理量 s, t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據 (s_k, t_k) ， $k = 1, \dots, 15$ 。

老師建議他將其中的 t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點 $(s_k, \log t_k)$ ， $k = 1, \dots, 15$ ，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s, t 的關係式最可能為下列哪一選項？

(1) $s = 2t$ (2) $s = 3t$ (3) $t = 10^s$ (4) $t^2 = 10^s$ (5) $t^3 = 10^s$



4. 將數字 1、2、3、...、9 等 9 個數字排成九位數(數字不得重複)，使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\frac{8!}{4!4!}$ (2) $\frac{8!}{5!3!}$ (3) $\frac{9!}{5!4!}$ (4) $\frac{8!}{5!}$ (5) $\frac{9!}{5!}$

5. 已知坐標空間中 P 、 Q 、 R 為平面 $2x - 3y + 5z = \sqrt{7}$ 上不共線三點。

令 $\overrightarrow{PQ} = (a_1, b_1, c_1)$ ， $\overrightarrow{PR} = (a_2, b_2, c_2)$ 。試選出下列行列式中絕對值為最大的選項。

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

6. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O 。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P 、 Q ，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) 1 (5) $\frac{8}{7}$

二、多選題(占 30 分)

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿12個月，下個月開始月薪增加1000元；以後再每滿12個月皆依此方式調薪。根據以上敘述，試選出正確的選項。

- (1)甲工作滿8個月後，第9個月的月薪比第1個月的月薪增加600元
- (2)工作滿一年後，第13個月甲的月薪比乙的月薪高
- (3)工作滿18個月後，第19個月甲的月薪比乙的月薪高
- (4)工作滿18個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少
- (5)工作滿兩年後，在第3年的12個月中，恰有3個月甲的月薪比乙的月薪高

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。

對每一正整數 n ，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎1次的機率。試選出正確的選項。

- (1) $p_{n+1} > p_n$ (2) $p_3 = 0.3$ (3) $\{p_n\}$ 為等差數列
- (4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$
- (5) 玩此遊戲 n 次且 $n \geq 2$ 時，至少中獎2次的機率等於 $2p_n$

9. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是首項為3且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式

$$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \log_3 a_n > 18$$

的項數 n 之可能選項。(1) 23 (2) 24 (3) 25 (4) 26 (5) 27

10. 考慮坐標平面上的直線 $L: 5y + (2k - 4)x - 10k = 0$ (其中 k 為一實數)，以及長方形 $OABC$ ，其頂點坐標為 $O(0,0)$ 、 $A(10,0)$ 、 $B(10,6)$ 、 $C(0,6)$ 。設 L 分別交直線 OC 、直線 AB 於點 D 、 E 。試選出正確的選項。

- (1) 當 $k = 4$ 時，直線 L 通過點 A (2) 若直線 L 通過點 C ，則 L 的斜率為 $-\frac{5}{2}$
- (3) 若點 D 在線段 \overline{OC} 上，則 $0 \leq k \leq 3$
- (4) 若 $k = \frac{1}{2}$ ，則線段 \overline{DE} 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)
- (5) 若線段 \overline{DE} 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)，則 L 的斜率可能為 $\frac{3}{10}$

11. 坐標平面上，設 A 、 B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣。設 C 、 D 分別表示以直線 $x = y$ 、 $x = -y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

- (1) A 、 C 將點 $(1,0)$ 映射到同一點 (2) $A = -B$ (3) $C = D^{-1}$ (4) $AB = CD$ (5) $AC = BD$

12. 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
- (2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$
- (3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$
- (4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當(左右、上下)平移得到

三、選填題(占25分)

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前3天各種飲料的銷售數量(單位：杯)與收入總金額(單位：元)如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為60杯、80杯與50杯，收入總金額為12900元。已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為_____元。

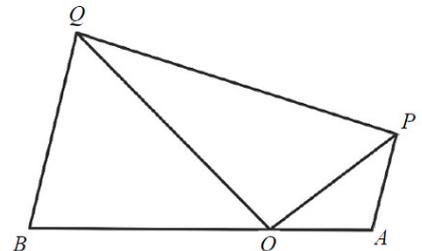
	果汁 (杯)	奶茶 (杯)	咖啡 (杯)	收入總金額 (元)
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

14. 設 a, b 為實數(其中 $a > 0$)，若多項式 $ax^2 + (2a+b)x - 12$ 除以 $x^2 + (2-a)x - 2a$ 所得餘式為 6，則數對 $(a, b) =$ _____。
15. 設 O, A, B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 \overrightarrow{OA} 垂直 \overrightarrow{OB} 。若 C, D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ 、且 \overrightarrow{OC} 垂直 \overrightarrow{OD} ，則 $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} =$ _____。
16. 令 $E: x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(-2, 1, 4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A, B, C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為 _____。(化為最簡根式)
17. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ ， t 為實數、 $L_2: \begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$ ， s 為實數，另一直線 L_3 與 L_1, L_2 皆相交且垂直。若 P, Q 兩點分別在 L_1, L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，則 P, Q 兩點的距離為 _____。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1, 0)$ 、 $B(-2, 0)$ 兩點。另有兩點 P, Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP} = \overline{OA}$ 、 $\overline{BQ} = \overline{OB}$ 、 $\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP = \theta$ 。根據上述，試回答下列問題。



18. 線段 \overline{OP} 長為下列哪一選項？(單選題，3 分)
 (1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ (3) $2\sin \theta$ (4) $2\cos \theta$ (5) $\cos 2\theta$

19. 若 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。(非選擇題，6 分)

20. (承 19 題) 試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。(非選擇題，6 分)

2023年大學學科能力測驗(數學A) 參考答案

選擇題：1.(4) 2.(5) 3.(4) 4.(1) 5.(2) 6.(3) 7.(3)(5) 8.(1)(4) 9.(3)(5)
10.(1)(3)(5) 11.(2)(5) 12.(1)(5)

選填題：13. 80 14. (3, -9) 15. $\frac{3}{4}$ 16. $2\sqrt{2}$ 17. $5\sqrt{2}$

混合題或非選擇題：

18. (4) 19. $Q\left(-\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ 20. (1) $\frac{72}{25}$ (2) $\frac{108}{25}$