

大學入學 112 年分科測驗數學甲

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 坐標平面上，一質點由點 $(-3, -2)$ 出發，沿著向量 $(a, 1)$ 的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

(1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (5) $2\sqrt{6}$

2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A 、 B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A 、 T_B 。開始記錄時這兩種物質

的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A 、 T_B 滿足下列哪一個關係式？(1) $-2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (2) $2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$

(3) $-2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$ (4) $2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$ (5) $2 \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$

3. 試問極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \left(\sqrt{4n^2 + 9 \times 1^2} + \sqrt{4n^2 + 9 \times 2^2} + \dots + \sqrt{4n^2 + 9 \times (n-1)^2} \right)$ 的值可用下列哪一個定

積分表示？ (1) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2} dx$ (3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx$

(4) $E_2: 2x+3y+6z=-4$ (5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9} dx$

二、多選題(占 40 分)

4. 設 a, b 為實數。已知四個數 $-3, -1, 4, 7$ 皆滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$ ，試選出正確的選項。

(1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$ (2) $3, 1, -4, -7$ 滿足 x 的不等式 $|x+a| \leq b$

(3) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq \frac{b}{2}$ (4) b 可能等於 4 (5) a, b 可能相等

5. 考慮實係數多項式 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 。已知方程式 $f(x) = 0$ 有虛根 $1+2i$

(其中 $i = \sqrt{-1}$)，試選出正確的選項。(1) $1-2i$ 也是 $f(x) = 0$ 的根 (2) a, b 皆為正數

(3) $f'(2.1) < 0$ (4) 函數 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極小值

(5) $y = f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

6. 設 a, b, c, d, r, s, t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\vec{u} = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v} = (c, d, 0)$ 及

$\vec{w} = (r, s, t)$ 滿足內積 $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ 。考慮三階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選

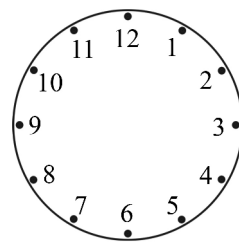
項。(1) 若 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (2) 若 $t \neq 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(3) 若存在一個向量 \vec{w} 滿足 $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ 且外積 $\vec{w} \times \vec{w} \neq \vec{0}$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(4) 若對任意三個實數 e, f, g ，向量 (e, f, g) 都可以表示成 \vec{u} ， \vec{v} ， \vec{w} 的線性組合，

則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (5)若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ，則 A 的行列式不等於 0

7. 有一個依順時針方向依序標示 1, 2, ..., 12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。對任一正整數 n ，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置， $P(X_n = k)$ 代表 $X_n = k$ 的機率(其中 $k = 1, 2, \dots, 12$)，且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

- (1) $E(X_1) = 6$ (2) $P(X_2 = 12) = \frac{1}{4}$ (3) $P(X_8 = 5) \geq \frac{1}{2^8}$
 (4) $P(X_8 = 4) = P(X_8 = 8)$ (5) $E(X_8) \leq 7$

8. 複數平面上，設 \bar{z} 代表複數 z 的共軛複數，且 $i = \sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。

- (1) 若 $z = 2i$ ，則 $z^3 = 4i\bar{z}$ (2) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ ，則 $|\alpha| = 2$
 (3) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta = i\alpha$ ，則 $\beta^3 = 4i\bar{\beta}$
 (4) 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主幅角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$
 (5) 恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$

三、選填題(占 18 分)

9. 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 、 $\overline{BC} = 2$ 。若分別以 \overline{AB} 與 \overline{AC} 為底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，則 $\overline{MN}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

10. 坐標空間中有方向向量為 $(1, -2, 2)$ 的直線 L 、平面 $E_1: 2x + 3y + 6z = 10$ 與平面 $E_2: 2x + 3y + 6z = -4$ 。則 L 被 E_1 、 E_2 所截線段的長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：

主辦單位準備編號 1、2、...、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

- (1) 此四位數大於 6400 (2) 此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

設 a, b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x) = ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ 皆通過點 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12. 試求向量 \overrightarrow{CO} 與 \overrightarrow{CP} 夾角的餘弦值。(非選擇題，2 分)
13. 試證明 $y = f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。(非選擇題，4 分)
14. 試求 $y = f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角(其中 $0 < \theta < \pi$) 的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 $\Gamma': 40x^2 + 4\sqrt{5}xy + 41y^2 = 180$ ，點 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓 Γ' 的長軸長為_____。(化為最簡根式) (選填題，2 分)
16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。(非選擇題，4 分)
17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x 軸上，且 P' 點的 x 坐標大於 0。試求 P 點的坐標。(非選擇題，6 分)

2023年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：1.(4) 2.(2) 3.(3) 4.(1)(2) 5.(1)(3) 6.(1)(4)(5) 7.(1)(4) 8.(2)(3)

選填題：9. $\frac{13}{3}$ 10. $\frac{21}{4}$ 11. 1554

混合題或非選擇題：12. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 13. 略 14. $\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$

15. $2\sqrt{5}$ 16. $\sqrt{5}x - 2y = 0, 4$ 17. $P(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$