大學入學 112 年(111 學年度)
分科測驗 數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 坐標平面上，一質點由點$(-3,-2)$出發，沿著向量$(a,1)$的方向移動 5 單位長之後剛好抵達x軸，其中a為正實數。試問a值等於下列哪一個選項？

(1)$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　(2)2　(3)$\sqrt{5}$　(4)$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(5)$2\sqrt{6}$　【112 分科測驗數甲】

答：(4)

解：$(-3,-2)+\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}(a,1)=(x,0)\ \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2}$（取正）

2. 放射性物質的半衰期T定義為「每經過時間T，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有A、B兩種放射性物質，其半衰期分別為T_A、T_B。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質B的質量為物質A的質量的四分之一。根據上述，試問T_A、T_B滿足下列哪一個關係式？

(1)$-2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$　(2)$2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$

(3)$-2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$　(4)$2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

(5)$2\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$　【112 分科測驗數甲】

答：(2)

解：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}}=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_B}}\ \Rightarrow \dfrac{112}{T_A}=-2+\dfrac{112}{T_B}$

3. 試問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

(1)$\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　(2)$\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　(3)$\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

(4)$\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　(5)$\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$　【112 分科測驗數甲】

答：(3)

解：所求$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+\left(\dfrac{3k}{n}\right)^2}\right)\dfrac{3}{n}=\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

解：所求$=\lim_{n\to\infty} 3\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+9\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}=3\int_0^1\sqrt{4+9x^2}\,dx$

令$t=3x \Rightarrow dt=3dx$，所求$=\int_0^3\sqrt{4+t^2}\,dt$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設a,b為實數。已知四個數$-3,-1,4,7$皆滿足x的不等式$|x-a|\le b$，試選出正確的選項。
(1)$\sqrt{10}$也滿足x的不等式$|x-a|\le b$
(2)$3,1,-4,-7$滿足x的不等式$|x+a|\le b$
(3)$-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}$滿足$x$的不等式$|x-a|\le\frac{b}{2}$
(4)b可能等於 4
(5)a,b可能相等 【112 分科測驗數甲】

答：(1)(2)

解：$-3\le x\le 7 \Rightarrow |x-2|\le 5$

則$|x+2|\le 5 \Rightarrow -7\le x\le 3$

則$|x-2|\le\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

5. 考慮實係數多項式$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$。已知方程式$f(x)=0$有虛根$1+2i$（其中$i=\sqrt{-1}$），試選出正確的選項。
(1)$1-2i$也是$f(x)=0$的根
(2)a,b皆為正數
(3)$f'(2.1)<0$
(4)函數$y=f(x)$在$x=1$有局部極小值
(5)$y=f(x)$圖形反曲點的x坐標皆大於 0 【112 分科測驗數甲】

答：(1)(3)

解：$x=1+2i \Rightarrow (x-1)^2=(2i)^2 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

$f(x)=\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2-2x-11\right)=x^4-4x^3-2x^2+12x-55$

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f'(2.1)<0$且$f(-1)$，$f(3)$為極小值，$f(1)$為極大值

$f''(x)=12x^2-24x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}=$反曲點$x$坐標

6. 設a,b,c,d,r,s,t皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量$\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,0)$及$\overrightarrow{w}=(r,s,t)$滿足內積$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$。考慮三階方陣$A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。
(1)若$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\ne 0$

(2)若$t \neq 0$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(3)若存在一個向量$\overrightarrow{w}$滿足$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$且外積$\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(4)若對任意三個實數e, f, g，向量(e, f, g)都可以表示成$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$的線性組合，

則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(5)若行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$，則$A$的行列式不等於 0 【112 分科測驗數甲】

答：(1)(4)(5)

解：(1)$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$，表$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$不平行

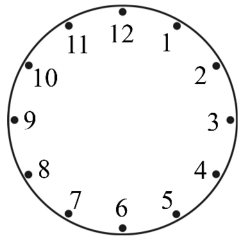
(2)$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$可能平行，且皆與$\overrightarrow{w}$垂直

(3)此時必$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$平行

(4)此時$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$可為基底向量，故$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$不平行

(5)$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$不平行，且皆與$\overrightarrow{w}$垂直 $\Rightarrow$ 體積$\neq 0$

7. 有一個依順時針方向依序標示$1, 2, \cdots, 12$數字的圓形時鐘（如圖所示）。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數n，令隨機變數X_n代表依上述規則經過n次移動後棋子所在的點鐘位置，$P(X_n = k)$代表$X_n = k$的機率（其中$k = 1, 2, \cdots, 12$），且令$E(X_n)$代表X_n的期望值。試選出正確的選項。

(1)$E(X_1) = 6$　(2)$P(X_2 = 12) = \frac{1}{4}$　(3)$P(X_8 = 5) \geq \frac{1}{2^8}$

(4)$P(X_8 = 4) = P(X_8 = 8)$　(5)$E(X_8) \leq 7$ 【112 分科測驗數甲】

答：(1)(4)

解：(1)$E(X_1) = \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 7 = 6$

(2)$P(X_2 = 12) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2! = \frac{1}{2}$，即一正一反

(3)(4)(5) 8 正在 4，8 反在 8，機率均為$\frac{1}{2^8}$

7 正 1 反在 6，7 反 1 正在 6，機率均為$\frac{8}{2^8}$

6 正 2 反在 8，6 反 2 正在 4，機率均為 $\dfrac{28}{2^8}$

5 正 3 反在 10，5 反 3 正在 2，機率均為 $\dfrac{56}{2^8}$

4 正 4 反在 12，機率為 $\dfrac{70}{2^8}$

故 $P(X_8=5)=0$，$P(X_8=4)=P(X_8=8)=\dfrac{1+28}{2^8}$

$E(X_8)=\dfrac{1}{2^8}[(4+8)\times(1+28)+6\times8\times2+(10+2)\times56+12\times70]=\dfrac{1956}{2^8}>7$

8. 複數平面上，設 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數，且 $i=\sqrt{-1}$。試選出正確的選項。
(1)若 $z=2i$，則 $z^3=4i\bar{z}$
(2)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$，則 $|\alpha|=2$
(3)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta=i\alpha$，則 $\beta^3=4i\bar{\beta}$
(4)滿足 $z^3=4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主輻角的最小可能值為 $\dfrac{\pi}{6}$
(5)恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\bar{z}$ 【112 分科測驗數甲】

答：(2)(3)

解：(1) $z=2i$，$z^3=-8i$，$4i\bar{z}=(4i)(-2i)=8$

(2) $\alpha^3=4i\bar{\alpha}\Rightarrow|\alpha|^3=|4i||\bar{\alpha}|\xrightarrow{|\alpha|=|\bar{\alpha}|}|\alpha|=2$

(3) $\alpha^3=4i\bar{\alpha}\xrightarrow{\alpha=\frac{\beta}{i}}\left(\dfrac{\beta}{i}\right)^3=4i\left(\dfrac{\bar{\beta}}{-i}\right)\Rightarrow\beta^3=4i\bar{\beta}$

(4)(5) $Arg(z)=\theta$，$Arg(\bar{z})=360°-\theta$

$\Rightarrow 3\theta=90°+(360°-\theta)+360°k \Rightarrow 4\theta=90°+360°(k+1)$

$\Rightarrow\theta=22.5°+90°(k+1)$，故有 4 解

三、選填題（佔 **18** 分）

9. 已知平面上直角 ΔABC 的三邊長 $\overline{AB}=\sqrt{7}$ 、$\overline{AC}=\sqrt{3}$ 、$\overline{BC}=2$。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在 ΔABC 的外部作頂角等於 $120°$ 的等腰三角形 ΔMAB 與 ΔNAC，
則 $\overline{MN}^2=$ ________。（化為最簡分數） 【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{13}{3}$

解：$\overline{MA}=\overline{MB}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，$\overline{NA}=\overline{NC}=1$，$\angle MAB=\angle MBA=\angle NAC=\angle NCA=30°$

$$\overline{MN}^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times1\times\cos\left(30^\circ+\angle BAC+30^\circ\right)$$

$$=\frac{7}{3}+1-2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\left[\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\right]=\frac{13}{3}$$

10.坐標空間中有方向向量為$(1,-2,2)$的直線L、平面$E_1:2x+3y+6z=10$與平面$E_2:2x+3y+6z=-4$。則L被E_1、E_2所截線段的長度為________。

（化為最簡分數）

【112 分科測驗數甲】

答：$\frac{21}{4}$

解：$$d(E_1,E_2)\times|\sec\theta|=\frac{|10-(-4)|}{7}\times\left|\frac{3\times7}{(1,-2,2)\cdot(2,3,6)}\right|=2\times\frac{21}{8}=\frac{21}{4}$$

11.百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：

主辦單位準備編號 1、2、⋯、9 的牌卡十張，

其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。

從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排成一個四位數。

若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

(1)此四位數大於 6400

(2)此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有________個抽出排成的四位數可獲得獎品。【112 分科測驗數甲】

答：1554

解：$\boxed{1}\square\square\square\sim\boxed{5}\square\square\square$可得獎（必含88）$\Rightarrow C_1^7\times\frac{3!}{2!}\times5=105$

$\boxed{6}\boxed{1}\square\square\sim\boxed{6}\boxed{3}\square\square$可得獎（必含88）$\Rightarrow 1\times3=3$

$\boxed{6}\boxed{4}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{5}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{7}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{9}\square\square$得獎$\begin{cases}\text{含}88\Rightarrow1\times4=4\\ \text{不含}88\Rightarrow C_2^7\times2!\times4=168\end{cases}$

$\boxed{6}\boxed{8}\square\square$必得獎$\Rightarrow C_2^8\times2!=56$

$\boxed{7}\square\square\square$、$\boxed{9}\square\square\square$必得獎$\begin{cases}\text{含}88\Rightarrow C_1^7\times\frac{3!}{2!}\times2=42\\ \text{不含}88\Rightarrow C_3^8\times3!\times2=672\end{cases}$

$\boxed{8}\square\square\square$必得獎$\Rightarrow C_3^9\times3!=504$

合計1554種

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

<u>12-14 題為題組</u>

設a,b為實數，並設O為坐標平面的原點。已知二次函數$f(x)=ax^2$的圖形與圓$\Omega: x^2+y^2-3y+b=0$皆通過點$P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，並令點$C$為$\Omega$的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12.試求向量$\overrightarrow{CO}$與$\overrightarrow{CP}$夾角的餘弦值。【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解：$y=ax^2$，$x^2+y^2-3y+b=0$，皆過$P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$

$\Omega:(x-0)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=2$ $\Rightarrow$圓心$C\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(1,-1)}{\dfrac{3}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

13.試證明$y=f(x)$圖形與Ω在P點有共同的切線。【112 分科測驗數甲】

證：$y=\dfrac{1}{2}x^2$過$P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$之切線為$\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot x$ $\Rightarrow x-y=\dfrac{1}{2}$

$x^2+y^2-3y+\dfrac{1}{4}=0$，過$P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$之切線為$x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{2}\left(y+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}=0$

$\Rightarrow x-y=\dfrac{1}{2}$，故切線相同，得證

14.試求$y=f(x)$圖形上方與Ω下半圓弧所圍區域的面積。【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

解：$2\displaystyle\int_0^1\left[\frac{3}{2}-\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\int_0^1\left[-x^2+3-2\sqrt{2-x^2}\right]dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+3x+c\right]\Bigg|_0^1-2\left[\dfrac{1}{8}\times\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2+\dfrac{1\times1}{2}\right]=\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

15-17 題為題組

坐標平面上，設Γ為中心在原點且長軸落在y軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉θ角（其中$0<\theta<\pi$）的線性變換將Γ變換到新橢圓Γ'：$40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，點$\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$為$\Gamma'$上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15.橢圓Γ'的長軸長為________。（化為最簡根式） 【112 分科測驗數甲】

答：$2\sqrt{5}$

解：所求$=2\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=2\sqrt{5}$

16.試求Γ'短軸所在的直線方程式與短軸長。 【112 分科測驗數甲】

答：$\sqrt{5}x-2y=0$，4

解：長軸斜率$=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，短軸斜率$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$短軸方程式：$\sqrt{5}x-2y=0$

$\Rightarrow$與Γ'交於$\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$\left(-\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，短軸長$=4$

17.已知在Γ上的一點P經由此旋轉後得到的點P'落在x軸上，且P'點的x坐標大於 0。試求P點的坐標。 【112 分科測驗數甲】

答：$P\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

解：Γ'與x軸交於$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$且$\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

則$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$