112 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 若在計算器中鍵入某正整數 N ，接著連按「√」鍵（取正平方根）3 次，視窗顯示得到答案為 2 ，則 N 等於下列哪一個選項？

(1) 2^3　(2) 2^4　(3) 2^6　(4) 2^8　(5) 2^{12}　【112 年學測數 A】

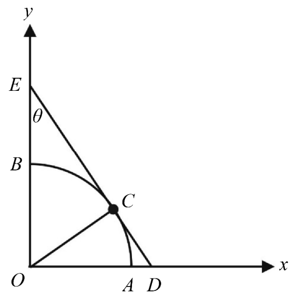
答：(4)

解：$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x}}=2^2 \Rightarrow \sqrt{x}=2^4 \Rightarrow x=2^8$

2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A 、 B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D 、 E ，如圖所示。令 $\angle OEC=\theta$ ，試選出為 $\tan\theta$ 的選項。

(1) $\overline{OE}$　(2) $\overline{OC}$　(3) $\overline{OD}$

(4) $\overline{CE}$　(5) $\overline{CD}$

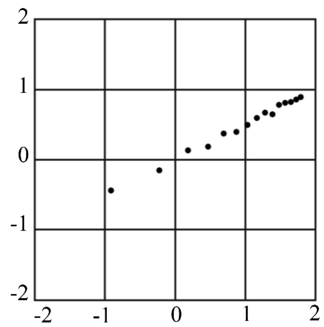


【112 年學測數 A】

答：(5)

解：$\angle OEC=\angle DOC=\theta$ ， $\overline{CD}=\overline{OC}\tan\theta=\tan\theta$

3. 某生推導出兩物理量 s,t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到15筆兩物理量的數據 (s_k,t_k)， $k=1,\cdots,15$ 。老師建議他將其中的 t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點 $(s_k,\log t_k)$， $k=1,\cdots,15$ ，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s,t 的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s=2t$　(2) $s=3t$　(3) $t=10^s$　(4) $t^2=10^s$　(5) $t^3=10^s$　【112 年學測數 A】

答：(4)

解：$y=\frac{1}{2}x \Rightarrow \log t=\frac{1}{2}s \Rightarrow 10^{\frac{1}{2}s}=t \Rightarrow 10^s=t^2$

4. 將數字 1、2、3、…、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\frac{8!}{4!4!}$　(2) $\frac{8!}{5!3!}$　(3) $\frac{9!}{5!4!}$　(4) $\frac{8!}{5!}$　(5) $\frac{9!}{5!}$　【112 年學測數 A】

答：(1)

解：第5位必為1，所求$=C^8_4=\dfrac{8!}{4!4!}$

5. 已知坐標空間中P、Q、R為平面$2x-3y+5z=\sqrt{7}$上不共線三點。
令$\overrightarrow{PQ}=\left(a_1,b_1,c_1\right)$，$\overrightarrow{PR}=\left(a_2,b_2,c_2\right)$。試選出下列行列式中**絕對值**為最大的選項。
(1)$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (2)$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (3)$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$
(4)$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (5)$\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$
【112年學測數A】

答：(2)
解：$(2,-3,5)$與$(1,-1,1)$內積最大，夾角最小，有最大的高

6. 坐標空間中，考慮邊長為1的正立方體，固定一頂點O。
從O以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為P、Q，
試問所得的內積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$之期望值為下列哪一個選項？
(1)$\dfrac{4}{7}$ (2)$\dfrac{5}{7}$ (3)$\dfrac{6}{7}$ (4)1 (5)$\dfrac{8}{7}$
【112年學測數A】

答：(3)
解：$E(X)=\dfrac{1}{C^7_2}[3+5+4+4+1+1]=\dfrac{18}{21}=\dfrac{6}{7}$

二、多選題（占30分）

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。
公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：
甲：工作滿3個月，下個月開始月薪增加200元；以後再每滿3個月皆依此方式調薪。
乙：工作滿12個月，下個月開始月薪增加1000元；以後再每滿12個月皆依此方式調薪。
根據以上敘述，試選出正確的選項。
(1)甲工作滿8個月後，第9個月的月薪比第1個月的月薪增加600元
(2)工作滿一年後，第13個月甲的月薪比乙的月薪高
(3)工作滿18個月後，第19個月甲的月薪比乙的月薪高
(4)工作滿18個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少
(5)工作滿兩年後，在第3年的12個月中，恰有3個月甲的月薪比乙的月薪高
【112年學測數A】

答：(3)(5)
解：(1)$甲_9=m+2\times200$
(2)$甲_{13}=m+4\times200<乙_{13}=m+1000$
(3)$甲_{19}=m+6\times200>乙_{18}=m+1000$
(4)$S_{甲18}=18m+200[3+6+9+12+15]=18m+9000$

$S_{乙18}=18m+1000[6]=18m+6000$

(5)$甲_{25}$～$甲_{27}=m+8\times 200$，$乙_{25}$～$乙_{36}=m+2\times 1000$

$甲_{28}$～$甲_{30}=m+9\times 200$

$甲_{31}$～$甲_{33}=m+10\times 200$

$甲_{34}$～$甲_{36}=m+11\times 200$

---

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。
   對每一正整數n，令p_n為玩此遊戲n次至少中獎1次的機率。試選出正確的選項。
   (1) $p_{n+1}>p_n$　(2) $p_3=0.3$　(3) $\langle p_n\rangle$為等差數列
   (4)玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於p_2-p_1
   (5)玩此遊戲n次且$n\geq 2$時，至少中獎 2 次的機率等於$2p_n$　【112 年學測數 A】

答：(1)(4)

解：(1) $p_n=1-(0.9)^n$為遞增函數

(2) $p_3=1-(0.9)^3=1-0.729=0.271$

(3) $\langle p_n\rangle$非等差等比數列

(4) $0.9\times 0.1=0.09$，$p_2-p_1=[0.19]-[0.1]=0.09$

(5) $1-C_0^n(0.9)^n-C_1^n(0.9)^{n-1}(0.1)=1-(0.9)^n-n(0.9)^{n-1}\times(0.1)$

$2p_n=2\left[1-(0.9)^n\right]=2-2\times(0.9)^n$

---

9. 設$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$是首項為 3 且公比為$3\sqrt{3}$的等比數列。試選出滿足不等式
$$\log_3 a_1-\log_3 a_2+\log_3 a_3-\log_3 a_4+\cdots+(-1)^{n+1}\log_3 a_n>18$$
   的項數n之可能選項。
   (1) 23　(2) 24　(3) 25　(4) 26　(5) 27　【112 年學測數 A】

答：(3)(5)

解：$18=\log_3 3^{18}=\log_3\left(3\sqrt{3}\right)^{12}$

故$\log_3\dfrac{a_1(a_3a_5\cdots a_{25})}{(a_2a_4\cdots a_{24})}=\log_3 3+\log_3\left(3\sqrt{3}\right)^{12}=1+18>18$

---

10. 考慮坐標平面上的直線L：$5y+(2k-4)x-10k=0$（其中k為一實數），
    以及長方形$OABC$，其頂點坐標為$O(0,0)$、$A(10,0)$、$B(10,6)$、$C(0,6)$。
    設L分別交直線OC、直線AB於點D、E。試選出正確的選項。
    (1)當$k=4$時，直線L通過點A
    (2)若直線L通過點C，則L的斜率為$-\dfrac{5}{2}$
    (3)若點D在線段$\overline{OC}$上，則$0\leq k\leq 3$
    (4)若$k=\dfrac{1}{2}$，則線段$\overline{DE}$在長方形$OABC$內部（含邊界）

(5)若線段$\overline{DE}$在長方形$OABC$內部（含邊界），則L的斜率可能為$\dfrac{3}{10}$　【112年學測數A】

答：(1)(3)(5)

解：$L：(-4x+5y)+k(2x-10)=0$，必過點$(5,4)$

(1) $k=4 \Rightarrow L：4x+5y-40=0$，$A(10,0)\in L$

(2)過$(0,6)$，$(5,4)$，斜率：$\dfrac{-2}{5}$

(3)過$(0,0) \Rightarrow k=0$，過$(0,6) \Rightarrow k=3 \Rightarrow 0\le k\le 3$

(4) $k=\dfrac{1}{2} \Rightarrow L：3x-5y+5=0 \begin{cases} 與\overleftrightarrow{OC}交於D(0,1) \\ 與\overleftrightarrow{AB}交於E(10,7) \end{cases}$

(5)斜率：$PB=\dfrac{2}{5}$，$PC=\dfrac{-2}{5} \Rightarrow -\dfrac{2}{5}\le L斜率\le\dfrac{2}{5}$

11. 坐標平面上，設A、B分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉$90°$的旋轉矩陣。設C、D分別表示以直線$x=y$、$x=-y$為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(1) A、C將點$(1,0)$映射到同一點　(2) $A=-B$　(3) $C=D^{-1}$

(4) $AB=CD$　(5) $AC=BD$　【112年學測數A】

答：(2)(5)

解：$A=\begin{bmatrix}\cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}\cos 2\times45° & \sin 2\times45° \\ \sin 2\times45° & -\cos 2\times45°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}\cos 2\times135° & \sin 2\times135° \\ \sin 2\times135° & -\cos 2\times135°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$

(3) $D^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\times\dfrac{1}{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\ne C$

(4) $AB=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$CD=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(5) $AC=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$BD=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

12.令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1)鉛直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

(2)若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3)在區間 $[0,2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

(4)在區間 $[0,2\pi)$ 中滿足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到

【112 年學測數 A】

答：(1)(5)

解：$f(x)=2\left[\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right]=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時為波峯，可作對稱軸

(2)波峯波谷皆可為對稱軸

(3)應有 2 解

(4)應為 $\dfrac{7\pi}{3}$

(5) $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}=4\left[\dfrac{1-\cos x}{2}\right]=2-2\cos x$

三、選填題（占 25 分）

13.某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量(單位：杯)與收入總金額(單位：元)如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為________元。

【112 年學測數 A】

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

答：80

解：$\begin{cases}60x+80y+50z=12900\\30x+40y+30z=6850\\50x+70y+40z=10800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=75\\y=55\\z=80\end{cases}$

14.設 a,b 為實數(其中 $a>0$)，若多項式 $ax^2+(2a+b)x-12$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為 6，則數對 $(a,b)=$________。

【112 年學測數 A】

答：$(3,-9)$

解：$ax^2+(2a+b)x-12=\left(x^2+(2-a)x-2a\right)a+6$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=2a-a^2\\-12=-2a^2+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-9\end{cases}$$

15.設 O、A、B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$。若 C、D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$、$3\overline{AD}=8\overline{BD}$、且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，則 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=$________。

【112 年學測數 A】

答：$\frac{3}{4}$

解：$A(5t,0)$，$B(0,5s)$，$C(3t,2s)$，$D\in\overleftrightarrow{AB}$，$\overline{OC}\perp\overline{OD}$

$3\overline{AD}=8\overline{BD}\Rightarrow D(-3t,8s)$，則 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-9t^2+16s^2=0$

$$\Rightarrow\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{5s}{5t}=\frac{s}{t}=\frac{3}{4}$$

16.令 $E:x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2,-1,0)$、$B(0,1,2)$、$C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為________。(化為最簡根式)

【112 年學測數 A】

答：$2\sqrt{2}$

解：$\overline{AB}$ 中垂面：$x-y-z=0$，$\overline{BC}$ 中垂面：$x-z=-4$，

$$P\in\begin{cases}x-y-z=0\\x-z=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4+t\\y=-4\\z=t\end{cases}\xrightarrow{P\in z=1}P(-3,-4,1)$$

$$d(P,E)=\frac{|-3+0+1-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

17.坐標空間中有兩不相交直線 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$，$t$ 為實數、$L_2:\begin{cases}x=2+2s\\y=5+s\\z=6-s\end{cases}$，$s$ 為實數，另一直線 L_3 與 L_1、L_2 皆相交且垂直。若 P、Q 兩點分別在 L_1、L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，則 P、Q 兩點的距離為________。(化為最簡根式)

【112 年學測數 A】

答：$5\sqrt{2}$

解：$\overrightarrow{L_1}\times\overrightarrow{L_2}=(1,-1,1)\times(2,1,-1)=(0,3,3)//(0,1,1)$

包含 L_2，平行 L_1，平面：$y+z=11$

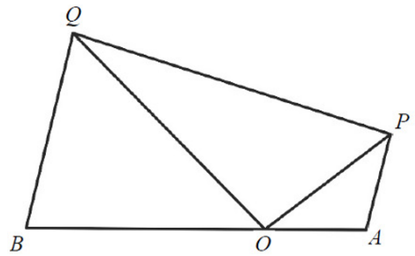
$$d((1,1,2),y+z=11)=\frac{|0+1+2-11|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

由三垂線定理：所求 $=\sqrt{3^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

坐標平面上O為原點，給定$A(1,0)$、$B(-2,0)$兩點。另有兩點P、Q在上半平面，且滿足$\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$為直角，如圖所示。令$\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。



18.線段$\overline{OP}$長為下列哪一選項？(單選題，3 分) (1)$\sin\theta$　(2)$\cos\theta$　(3)$2\sin\theta$　(4)$2\cos\theta$　(5)$\cos 2\theta$　【112 年學測數 A】

答：(4)

解：$\overline{OA}=\overline{PA}=1$，$\angle AOP=\angle APO=\theta \Rightarrow \overline{OP}=2\cos\theta$

19.若$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求點Q的坐標，並說明$\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。(非選擇題，6 分)　【112 年學測數 A】

答：$Q\left(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25}\right)$

解：承(18)，$\angle PAX=2\theta$，$\angle POQ=90^\circ$，$\angle BOQ=\angle BQO=90^\circ-\theta$

故$\angle QBO=2\theta$，表$\overline{AP}//\overline{BQ}$，又$\overline{OA}=\overline{AP}=1$，$\overline{OB}=\overline{BQ}=2$

$\Rightarrow \overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$

而$Q(-2+2\cos 2\theta,2\sin 2\theta)$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，

$\Rightarrow \sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$，$\cos 2\theta=\dfrac{7}{25}$　$\Rightarrow Q\left(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25}\right)$

20.(承 19 題)試求點A到直線BQ的距離，並求四邊形$PABQ$的面積。(非選擇題，6 分) 【112 年學測數 A】

答：(1)$\dfrac{72}{25}$　(2)$\dfrac{108}{25}$

解：$\overleftrightarrow{BQ}=(y-0)=\tan 2\theta(x+2)$　$\Rightarrow (y-0)=\dfrac{24}{7}(x+2)$

$\Rightarrow 24x-7y+48=0$，故$d\left(A,\overleftrightarrow{BQ}\right)=\dfrac{|24-0+48|}{25}=\dfrac{72}{25}$

梯形$APQB=(1+2)\times\dfrac{72}{25}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{108}{25}$