

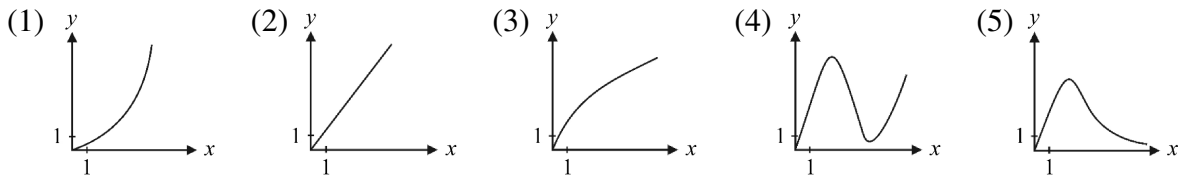
112 年大學入學學力測驗數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

1. 某抽水站發現其用電量（單位：度）與抽水馬達轉速（單位：rpm）的三次方成正比。根據上述，試問下列這五個圖中，哪一個最可以描述此抽水站的用電量 y （度）與抽水馬達轉速 x （rpm）的對應關係？



【112 年學測數 B】

答：(1)

解： $y = x^3$

2. 考慮實數二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$ ，

則 $c - 2b$ 的值為何？

(1) -11 (2) -4 (3) 1 (4) 10 (5) 11

【112 年學測數 B】

答：(2)

解： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & \frac{7}{2} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$c - 2b = 3 - 2\left(\frac{7}{2}\right) = -4$$

3. 地面上有甲、乙兩大樓，已知甲的高度大於乙，且甲、乙兩大樓的水平距離為 150 公尺。某人從甲樓頂拉一條繩索到乙樓頂，並從甲樓頂測得乙樓頂的俯角為 22° 。

假設該繩索被拉成直線，試問繩索的長度（單位：公尺）最接近下列哪個選項？

（註：眼睛往下看目標物時，視線與水平線間的夾角稱為俯角）

(1) 150 (2) $150\sin 22^\circ$ (3) $150\cos 22^\circ$ (4) $\frac{150}{\cos 22^\circ}$ (5) $\frac{150}{\sin 22^\circ}$

【112 年學測數 B】

答：(4)

解：所求 = $150\sec 22^\circ$

4. 某校期中考試有 29 名考生，且成績均相異，統計後得到位於第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為 41、60、74 與 92 分。後來發現成績有誤需要調整分數，成績較高的前 15 名學生的分數應該要各加 5 分，其餘學生成績不變。

假設調整後第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為 a 、 b 、 c 與 d 分，則數組 (a, b, c, d) 為下列哪個選項？

(1) (41, 60, 74, 92) (2) (41, 60, 74, 97) (3) (41, 65, 79, 97)

答：(3)

解：第 50 百分位即第 15 名

5. 袋子裡有編號分別為 1, 2, ..., 100 的 100 顆球，某甲從袋中隨機抽取一球，每顆球被抽到的機率均相等。試問在下列哪個選項的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率最大？

- (1) 某甲抽到球的號碼是奇數 (2) 某甲抽到球的號碼是質數
 (3) 某甲抽到球的號碼是 7 的倍數 (4) 某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數
 (5) 某甲抽到球的號碼小於 10

【112 年學測數 B】

答：(5)

解：(1) $\frac{1}{50}$ (2) $\frac{1}{25}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{1}{80}$ (5) $\frac{1}{9}$

6. 某甲計算多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 除以 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的餘式，其中 a, b, c, d 為實數，且 $a \neq 0$ 。他誤看成 $g(x)$ 除以 $f(x)$ ，計算後得出餘式為 $-3x - 17$ 。假設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 正確的餘式等於 $px^2 + qx + r$ ，則 p 的值會等於下列哪個選項？

(1) -3 (2) -1 (3) 0 (4) 2 (5) 3

【112 年學測數 B】

答：(3)

解： $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^3 + ax^2 + bx + c)[a] - 3x - 17$

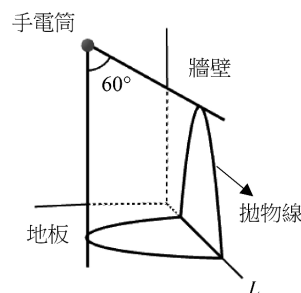
$$\Rightarrow b = a^2, c = ab - 3, d = ac - 17$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \left[\frac{1}{a} \right] + px^2 + qx + r$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{a} + p, \text{ 即 } a^2 = b + ap, \text{ 即 } ap = 0 \xrightarrow{a \neq 0} p = 0$$

7. 已知某手電筒照射的光線為直圓錐狀，且光發散的夾角為 60° ，如圖所示。設牆壁與地板垂直且交界處為直線 L ，將此手電筒以垂直於 L 的方向照射，即此直圓錐的軸與 L 垂直。若手電筒照射在牆壁上的光線邊緣為拋物線的一部份，則在地板上的光線邊緣為下列哪種圖形的一部份？

- (1) 兩相交直線 (2) 圓形 (3) 拋物線
 (4) 長短軸不相等的橢圓 (5) 雙曲線



【112 年學測數 B】

答：(4)

解：牆壁與母線平行，地板與母線垂直

二、多選題 (占 25 分)

8. 某電子看板持續不斷的輪流播放 A、B 兩段廣告 (A、B、A、B...)，每個廣告播放時間皆為 T 分鐘 (其中 T 為整數)。某甲經過時剛好開始播放 A 廣告，30 分鐘後，某甲回到該處，看到恰好開始播放 B 廣告。試選出可能是 T 值的選項。

- (1) 15 (2) 10 (3) 8 (4) 6 (5) 5

【112 年學測數 B】

答：(2)(4)

解：30 為 T 的奇數倍

9. 已知 $a=6$ 、 $b=\frac{20}{3}$ 、 $c=2\sqrt{10}$ 和 d ，且 d 為有理數，將這四個數標註在數線上，

即 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 和 $D(d)$ 。試選出正確的選項。

(1) $a+b+c+d$ 必為一個有理數

(2) $abcd$ 必為一個無理數

(3) 點 D 有可能與點 C 的距離等於 $2\sqrt{10}+6$

(4) 點 A 和點 B 的中點位在點 C 的右邊

(5) 數線上和點 B 距離小於 8 的所有點中，正整數有 14 個，負整數有 1 個 【112 年學測數 B】

答：(3)(4)(5)

解：(1) $6+\frac{20}{3}+2\sqrt{10}+Q$ 必為無理數

(2) $6\times\frac{20}{3}\times 2\sqrt{10}\times 0$ 可為有理數

(3) $d(-6)$

(4) $\frac{6+\frac{20}{3}}{2} > \sqrt{6\times\frac{20}{3}} = 2\sqrt{10}$

(5) $\left|x-\frac{20}{3}\right| < 8 \Rightarrow \frac{-4}{3} < x < \frac{44}{3}$ ， $x \in Z \Rightarrow x = -1, 0, 1, 2, \dots, 14$

10. 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X 、 Y 。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$ 。乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，例如 14 點時乙的數量為 $2Y$ 、16 點時乙的數量為 $4Y$ ，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。

時刻 (點)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$								

(1) $X > Y$

(2) 在 13 點時，甲的數量為 $\frac{4}{3}X$

(3) 在 15 點時，乙的數量為 $3Y$

(4) 在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍

(5) 在 24 點時，乙的數量為甲的 2 倍

【112 年學測數 B】

答：(1)(5)

解：(1) $X \times (2)^{\frac{18-12}{3}} = Y \times (2)^{\frac{18-12}{2}} \Rightarrow 4X = 8Y \Rightarrow X = 2Y$

(2) $X \times (2)^{\frac{13-12}{3}} = X \times 2^{\frac{1}{3}} \neq \frac{4}{3}X$

(3) $Y \times (2)^{\frac{15-12}{2}} = Y \times 2^{\frac{3}{2}} \neq 3Y$

$$(4) \frac{Y \times (2)^{\frac{19-12}{2}}}{X \times (2)^{\frac{19-12}{3}}} = \frac{Y \times (2)^{\frac{7}{2}}}{2Y \times (2)^{\frac{7}{3}}} = 2^{\frac{1}{6}} \neq \frac{3}{2}$$

$$(5) \frac{Y \times (2)^{\frac{24-12}{2}}}{X \times (2)^{\frac{24-12}{3}}} = \frac{Y \times (2)^6}{2Y \times (2)^4} = 2$$

11. 坐標平面上有一圓，其圓心為 $A(a, b)$ ，且此圓與兩坐標軸皆相切，
另有一點 $P(c, c)$ ，其中 $a > c > 0$ ，且已知 $\overline{PA} = a + c$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a = b$ (2) 點 P 位於直線 $x + y = 0$ 上 (3) 點 P 在此圓內
(4) $\frac{a+c}{b-c} = \sqrt{2}$ (5) $\frac{a}{c} = 2 + 3\sqrt{2}$

【112 年學測數 B】

答：(1)(4)

解：(2) 點 P 位於直線 $x - y = 0$ 上 (3) 點 P 不必然在此圓內

(1)(4)(5) 若圓心 $(a, b) = (a, a) \Rightarrow \sqrt{2}(a - c) = a + c$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b-c} = \frac{a+c}{a-c} = \sqrt{2}, \frac{a}{c} = 3 + 2\sqrt{2}$$

若圓心 $(a, b) = (a, -a) \Rightarrow (\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}c)^2 = (a+c)^2$
 $\Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$ ，不合

12. 在球心為 O 的球形地球儀上，有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個點，
其中 A 、 B 、 C 三點都在赤道上，且經度分別為東經 0° 、 60° 和 90° ；
 D 、 E 兩點都在北緯 30° 線上，且經度分別為東經 0° 、 180° 。試選出正確的選項。

- (1) 赤道的長度等於東經 0° 和 180° 這兩條經線長度的總和
(2) 北緯 45° 線的長度等於赤道長度的 $\frac{1}{2}$
(3) 「由 A 沿赤道移動到 B 的最短路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點的路徑長」
(4) 「由 D 沿北緯 30° 線移動到 E 的路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點，再由北極點沿東經 180° 經線移動到 E 的路徑長的總和」
(5) 通過北極點與 A 點的直線與通過北極點與 C 點的直線互相垂直

【112 年學測數 B】

答：(1)(3)

解：(2) 應為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

(4) 應為「由 D 沿北緯 30° 線移動到 E 的路徑長」，
大於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點，
再由北極點沿東經 180° 經線移動到 E 的路徑長的總和」

(5) $A(r, 0, 0)$ 、北極 $(0, 0, r)$ 、 $C(0, r, 0)$
向量 $(-r, 0, r)$ 與 $(0, -r, r)$ 不垂直

三、選填題 (占 25 分)

13. 有兩個正實數 a 、 b ，已知 $ab^2 = 10^5$ ， $a^2b = 10^3$ ，則 $\log b =$ _____。(化為最簡分數) 【112 年學測數 B】

答： $\frac{7}{3}$

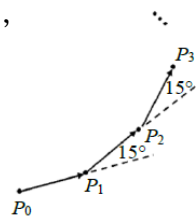
解： $\begin{cases} ab^2 = 10^5 \\ a^2b = 10^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = 10^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 10^{\frac{3}{2}} \\ b = 10^{\frac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10^{\frac{1}{3}} \\ b = 10^{\frac{7}{3}} \end{cases}$ ，所求 $= \log 10^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3}$

14. 從 1 到 20 的 20 個整數中，取出相異的 3 個數 a 、 b 、 c ，使其成為等差數列，且 $a < b < c$ ，則 (a, b, c) 的取法有 _____ 種。 【112 年學測數 B】

答： 90

解： $\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3), (2, 3, 4) \dots (18, 19, 20) \text{ 共 18 組} \\ (1, 3, 5), (2, 4, 6) \dots (16, 18, 20) \text{ 共 16 組} \\ (1, 4, 7), (2, 5, 8) \dots (14, 17, 20) \text{ 共 20 組} \\ \dots \dots \\ (1, 10, 19), (2, 11, 20) \text{ 共 2 組} \end{array} \right\} \text{ 合計 } \frac{(2+18) \times 9}{2} = 90 \text{ 組}$

15. 如圖所示，平面上有一點 P_0 先朝某方向前進 2 個單位長到達點 P_1 後，依前進方向左轉 15 度；朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_2 後，然後再依前進方向左轉 15 度；再朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_3 後，... 依此類推。

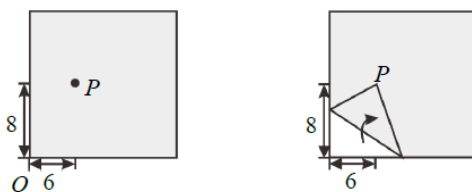


則向量 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的內積為 _____。(化為最簡根式) 【112 年學測數 B】

答： $2\sqrt{2}$

解： $\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \overrightarrow{P_5P_6} = 2(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) \cdot 2(\cos 75^\circ, \sin 75^\circ)$
 $= 4(\cos 30^\circ \cos 75^\circ + \sin 30^\circ \sin 75^\circ) = 4\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$

16. 正方形紙張上有一點 P ， P 點距離紙張左邊界 6 公分，距離下邊界 8 公分。今將紙張的左下角 O 點往內摺至 P 點，如圖所示。則摺進去的三角形面積是 _____ 平方公分。 【112 年學測數 B】



答： $\frac{625}{24}$

解： $O(0, 0)$ ， $P(6, 8)$ ， \overline{OP} 之中垂線： $3x + 4y = 25$

$$\text{所圍面積} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{3} \times \frac{25}{4} = \frac{625}{24}$$

17. 考慮所有只用 0, 1, 2 三種數字組成的序列，序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成(可重複出現)。令 $a(n)$ 為在所有長度 n 的序列中連續兩個零(即 00)出現的次數總和。例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000, 001, 002, 100, 200, 其中 000 貢獻 2 次 00, 其餘各貢獻 1 次 00, 故 $a(3) = 6$ 。則 $a(5)$ 的值为_____。 【112 年學測數 B】

答：108

解：5 個 0 \Rightarrow 貢獻 4 次

4 個 0 \Rightarrow 貢獻 $(3 \times 2) \times 2 + 2 \times 2! \times 2 + 2 \times 2 = 24$ 次

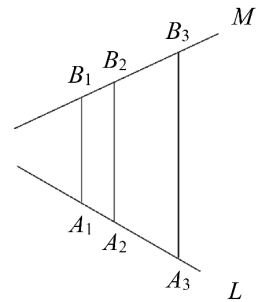
3 個 0 \Rightarrow 貢獻 $(2 \times 3) \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times C_2^3 \times 2! = 48$ 次

2 個 0 \Rightarrow 貢獻 $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 次

第貳部分：混合題或非選擇題 (占 15 分)

18-20 題為題組

空地上有三根與地面垂直且等高的電線桿，其底座在一直線上且間距相等。某甲以單點透視法在畫布上畫這三根電線桿。在畫布上設坐標系，使得電線桿皆與 y 軸平行，三根底座的點分別為 $A_1(0,0)$ 、 A_2 、 A_3 ，都在直線 $L: x+3y=0$ 上；三根頂端的點分別為 $B_1(0,3)$ 、 B_2 、 B_3 ，都在直線 $M: 2x-3y+9=0$ 上，如圖所示。已知 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1}$ ，且由單點透視法可知直線 A_1B_3 與直線 A_3B_1 的交點在直線 A_2B_2 上。設 L 和 M 相交於 P 點(此點又稱為「消失點」)。根據上述，試回答下列問題。



18. 若向量 $\overrightarrow{PA_1} = k\overrightarrow{PA_3}$ ，則 k 的值为_____。(化為最簡分數) 【112 年學測數 B】

答： $\frac{1}{2}$

19. 試求 P 與 B_3 這兩點的坐標。 【112 年學測數 B】

答： $P(-3,1)$ ， $B_3(3,5)$

解： M 線與 L 線交於 $P(-3,1)$ ，故 $B_3(3,5)$

20. 若有隻蜜蜂恰好停在中間那根電線桿上距離底座與頂端的長度比為 1:2 的位置上。某甲想在這個畫布的線段 A_2B_2 上畫出這隻蜜蜂，假設畫布上蜜蜂位置為 Q 點，即點 Q 到線段 A_2B_2 的底座 A_2 與到線段 A_2B_2 頂端 B_2 的長度比為 1:2，試求 Q 點坐標。 【112 年學測數 B】

答： $Q(1,1)$

解： $A_1(0,0)$ 、 $A_3(3,-1)$ ，故 $A_2\left(1, -\frac{1}{3}\right)$

$B_1(0,3)$ 、 $B_3(3,5)$ ，故 $B_2\left(1, \frac{11}{3}\right)$

$$Q\left(1, \frac{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \times \frac{11}{3}}{3}\right) = (1,1)$$

