

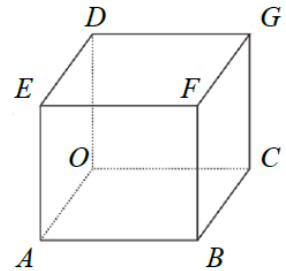
113 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰退。已知在服用某藥物 2 小時後，體內仍殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一選項正確？
- (1) 服用 3 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{3}$ 劑量 (2) 服用 4 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{4}$ 劑量 (3) 服用 6 小時後，體內仍殘留有該物的 $\frac{1}{6}$ 劑量 (4) 服用 8 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{8}$ 劑量 (5) 服用 10 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{10}$ 劑量

2. 如圖， $OABC-DEFG$ 為一正方體，試問向量外積 $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AG}$ 與下列哪一個向量平行？



- (1) \overrightarrow{AE} (2) \overrightarrow{BE} (3) \overrightarrow{CE} (4) \overrightarrow{DE} (5) \overrightarrow{OE}

3. 設 $a \in \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ ，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數，若函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為 -7 、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0) > 0$ ？ (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
4. 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x + \sin \frac{\pi}{6}$ 且 $0 \leq x < 2\pi$ ？ (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個(含)以上
5. 將 1 到 50 這 50 個正整數平分成甲乙兩組，每組各 25 個數，使得甲組的中位數比乙組的中位數小 1。試問共有幾種分法？(1) C_{25}^{50} (2) C_{24}^{48} (3) C_{12}^{24} (4) $(C_{12}^{24})^2$ (5) $C_{24}^{48} \cdot C_{12}^{24}$
6. 在同一平面上，相距 7 公里的 A, B 兩砲台， A 在 B 的正東方。某次演習時， A 向西偏北 θ 方向發射砲彈， B 則向東偏北 θ 方向發射砲彈，其中 θ 為銳角，觀測回報兩砲彈皆命中 9 公里外的同一目標 P 。接著 A 改向西偏北 $\frac{\theta}{2}$ 方向發射砲彈，彈著點為 9 公里外的點 Q 。試問砲台 B 與彈著點 Q 的距離 \overline{BQ} 為何？ (1) 4 公里 (2) 4.5 公里 (3) 5 公里 (4) 5.5 公里 (5) 6 公里

二、多選題(占 30 分)

7. 令坐標平面上滿足 $y = \log x$ 的點 (x, y) 所成圖形為 Γ ，試問滿足下列哪些關係式的 (x, y) 所成圖形與 Γ 完全相同？ (1) $y + \frac{1}{2} = \log(5x)$ (2) $2y = \log(x^2)$ (3) $3y = \log(x^3)$ (4) $x = 10^y$ (5) $x^3 = 10^{(y^3)}$
8. 對任一正整數 $n \geq 2$ ，令 T_n 表示邊長為 $n, n+1, n+2$ 的三角形。試選出正確的選項。
(註：若三角形的三邊長分別為 a, b, c ，令 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，則三角形面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)
- (1) T_n 皆為銳角三角形 (2) $T_2, T_3, T_4, \dots, T_{10}$ 的周長形成等差數列 (3) T_n 的面積隨 n 增大而增大 (4) T_5 的三高依序形成等差數列 (5) T_3 的最大角大於 T_2 的最大角

9. 某實驗室蒐集了大量的 A 、 B 兩相似物種，記錄其身長為 x (單位：公分)與體重 y (單位：公克)，得 A 、 B 兩物種的平均身長分別為 $\overline{x_A} = 5.2$ 、 $\overline{x_B} = 6$ ，標準差分別為 0.3 、 0.1 。令 A 、 B 兩物種的平均體重分別為 $\overline{y_A}$ 、 $\overline{y_B}$ 。若 A 、 B 兩物種其體重 y 對身長 x 的迴歸直線分別為 $L_A: y = 2x - 0.6$ 、 $L_B: y = 1.5x + 0.4$ ，相關係數分別為 0.6 、 0.3 。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 P ，試選出正確的選項。(1) $\overline{y_A} < \overline{y_B}$ (2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差 (3) 就 A 物種而言，個體 P 的體重與平均體重 $\overline{y_A}$ 之差的絕對值大於一個標準差 (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 L_A 的距離小於其到直線 L_B 的距離 (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 $(\overline{x_A}, \overline{y_A})$ 的距離小於其與點 $(\overline{x_B}, \overline{y_B})$ 的距離
10. 坐標平面上有一正方形與一正六邊形，正方形在正六邊形的右邊。已知兩正多邊形都有一邊在 x 軸上，且正方形中心 A 與正六邊形中心 B 都在 x 軸的上方，且兩多邊形恰有一個交點 P ，又知正方形的邊長為 6 ，而點 P 到 x 軸的距離為 $2\sqrt{3}$ 。試選出正確的選項。(1) 點 A 到 x 軸的距離大於點 B 到 x 軸的距離 (2) 正六邊形的邊長為 6
(3) $\overrightarrow{BA} = (7, 3 - 2\sqrt{3})$ (4) $\overline{AP} > \sqrt{10}$ (5) 直線 AP 斜率大於 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
11. 考慮二元一次方程組 $\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 1 \end{cases}$ ，其係數 a, b 之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令 a 值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時 b 值為 1 ，若硬幣出現反面時 b 值為 2 。試選出正確的選項。(1) 擲出 $a = b$ 的機率為 $\frac{1}{3}$ (2) 此方程組無解的機率為 $\frac{1}{12}$
(3) 此方程組有唯一解的機率為 $\frac{5}{6}$ (4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為 $\frac{1}{2}$
(5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下， x 值為正的機率為 $\frac{2}{5}$
12. 在坐標平面上給定三點 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $C(-1, 0)$ ，令 Γ 為 $\triangle ABC$ 經矩陣 $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ 變換後的圖形，其中 a 為實數。試選出正確的選項。(1) 若 $a = 0$ ，則 Γ 為等腰直角三角形 (2) $\triangle ABC$ 的邊上至少有兩點經 T 變換後坐標不變 (3) Γ 必有部分落在第四象限 (4) 平面上找得到一個圖形 Ω 經 T 變換後為 $\triangle ABC$ (5) Γ 的面積為定值

三、選填題(占 25 分)

13. 某銷售站銷售甲、乙、丙三型手機，甲手機每支利潤 100 元，乙手機每支利潤 400 元，丙手機每支利潤 240 元。上年度甲、乙、丙手機各賣出 A, B, C 支，平均每支利潤為 260 元；且知銷售甲、乙兩型手機共 $A+B$ 支的平均每支利潤為 280 元。則該站上年度售出的三型手機數量比為 $A : B : C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡整數比)
14. 已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 皆為實係數三次多項式，且除以 $x^2 - 2x + 3$ 的餘式分別為 $x + 1$ 、 $x - 3$ 、 -2 。若 $xf(x) + ag(x) + bh(x)$ 可以被 $x^2 - 2x + 3$ 整除，其中 a, b 為實數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 某商場舉辦現場報名的摸彩箱抽獎活動，報名截止後，主持人依報名人數置入同數量的摸彩球，其中有 10 顆被標示為幸運獎，其獎項為 5000 元禮券及 8000 元禮券各 5 顆，每顆球被抽中的機率皆相同，抽後不放回。抽獎前，主辦單位依獎項個數與報名人數，主持人公告中獎機率為 0.4%。開始抽獎後，每人依序抽球，每個人只有一次抽獎機會。若前 100 位參加抽獎者，恰有 1 人抽中 5000 元禮券且沒有人抽中 8000 元禮券，則抽獎順序為第 101 號者可獲禮券金額的期望值為_____元。
16. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 \vec{v} 與兩向量 $(2, -3)$ ， $(3, 2)$ 的夾角皆為銳角，則 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為_____。(化為最簡根式)
17. 坐標平面上，在以 $O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0)$ 為頂點的正方形(含邊界)內，令 R 為滿足下述條件的點 $P(x, y)$ 所成區域：與點 $P(x, y)$ 的距離為 $|x - y|$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$ (含邊界)內。則區域 R 的面積為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

坐標空間中，設 O 為原點， E 為平面 $x - z = 4$ 。試回答下列問題。

18. 若原點 O 在平面 E 上的投影點為 Q ，且向量 \overrightarrow{OQ} 與向量 $(1, 0, 0)$ 的夾角為 α ，則 $\cos \alpha$ 之值為下列哪一選項？(單選題，3 分)
- (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
19. 已知空間中有一點 $P(a, b, c)$ 滿足向量 \overrightarrow{OP} 與向量 $(1, 0, 0)$ 的夾角 $\theta \leq \frac{\pi}{6}$ 。試說明實數 a, b, c 滿足不等式 $a^2 \geq 3(b^2 + c^2)$ 。(非選擇題，4 分)
20. 承 19 題，已知點 P 在平面 E 上且 $b = 0$ 。試求 c 的最大可能範圍，並求線段 \overline{OP} 的最小可能長度。(非選擇題，8 分)

2024 年大學學科能力測驗(數學 A) 參考答案

選擇題：1.(2) 2.(5) 3.(1) 4.(2) 5.(4) 6.(3) 7.(3)(4) 8.(2)(3) 9.(3) 10.(3)(5)
11.(2)(3) 12.(2)(4)(5)

選填題：13. 2:3:5 14. -3,3 15. 25 16. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 17. $\frac{1}{3}$

混合題或非選擇題：

18. (4) 19. 略 20. $2-2\sqrt{3} \leq c \leq 2+2\sqrt{3}$ ， $c=2-2\sqrt{3}$ 時，有最小值 $4(\sqrt{3}-1)$

$$\begin{aligned} 19. \cos \theta &= \frac{(a, b, c) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times 1} \geq \cos \frac{\pi}{6} \\ &\Rightarrow 2a \geq \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\Rightarrow a^2 \geq 3(b^2 + c^2), \text{ 成立。} \end{aligned}$$