

大學入學 113 年分科測驗數學甲

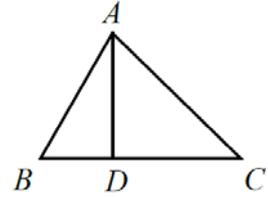
第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 如右圖所示，有一 $\triangle ABC$ ，已知 \overline{BC} 邊上的高 $\overline{AD} = 12$ ，

且 $\tan \angle B = \frac{3}{2}$ 、 $\tan \angle C = \frac{2}{3}$ 。試問 \overline{BC} 的長度為何？

- (1) 20 (2) 21 (3) 24 (4) 25 (5) 26

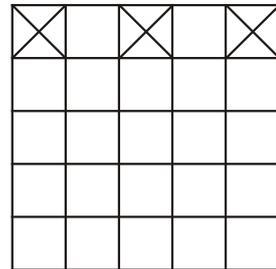


2. 坐標平面上，橢圓 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ (其中 a 為正實數)。若將 Γ 以原點 β 為中心，沿 x 軸方向伸縮為 2 倍、沿 E_2 軸方向伸縮為 3 倍後，所得到的新圖形會通過點 $(18, 0)$ 。試問下列哪一個選項是 Γ 的焦點？

- (1) $(0, 3\sqrt{3})$ (2) $(-3\sqrt{5}, 0)$ (3) $(0, 6\sqrt{13})$ (4) $(-3\sqrt{13}, 0)$ (5) $(9, 0)$

3. 想在 5×5 的棋盤上擺放 4 個相同的西洋棋的城堡棋子。由於城堡會將同一行或是同一列的棋子吃掉，故擺放時規定每一行與每一列最多只能擺放一個城堡。在第一列的第一、三、五格(如圖示畫叉的格子)不擺放的情況下，試問共有多少種擺放方式？

- (1) 216 (2) 240 (3) 288 (4) 312 (5) 360



二、多選題(占 40 分)

4. 一遊戲廠商將舉辦抽獎活動，廠商公告每次抽獎需使用掉一個代幣，且每次抽獎的中獎機率皆為 $\frac{1}{10}$ 。某甲決定先存若干個代幣，並在活動開始後進行抽獎，直到用完所有代幣才停止。試選出正確的選項。

- (1) 某甲中獎一次所需要抽獎次數的期望值為 10
 (2) 某甲抽獎兩次就中獎一次以上的機率為 0.2
 (3) 某甲抽獎 10 次都沒中獎的機率小於抽獎 1 次就中獎的機率
 (4) 某甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9
 (5) 某甲只要存足夠多的代幣，就可以保證中獎的機率為 1

5. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式。已知 $f(-2-3i) = 0$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)，且 $f(x)$ 除以 $x^2 + x - 2$ 的餘式為 18。試選出正確的選項。

- (1) $f(2+3i) = 0$ (2) $f(-2) = 18$ (3) $f(x)$ 的三次項係數為負
 (4) $f(x) = 0$ 恰有一正實根 (5) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心在第一象限

6. 坐標空間中，考慮滿足內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{15}$ 與外積 $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 0, 3)$ 的兩向量 \vec{u} 、 \vec{v} 。試選出正確的選項。

- (1) \vec{u} 與 \vec{v} 的夾角 θ (其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ ， π 為圓周率) 大於 $\frac{\pi}{4}$ (2) \vec{u} 可能為 $(1, 0, -1)$
 (3) $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq 2\sqrt{5}$ (4) 若已知 \vec{v} ，則 \vec{u} 可以被唯一決定
 (5) 若已知 $|\vec{u}| + |\vec{v}|$ ，則 $|\vec{v}|$ 可以被唯一決定

7. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 5$ 與 $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形 (其中 π 為圓周率)。試選出正確的選項。
- (1) $f'(1) = 0$ (2) $y = f(x)$ 在閉區間 $[0, 2]$ 為遞增
 (3) $y = f(x)$ 在閉區間 $[0, 2]$ 為凹向上 (4) 對任意實數 x ， $g(x + 6\pi) = g(x)$
 (5) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在閉區間 $[3, 4]$ 皆為遞增
8. 設 z 為非零複數，且設 $\alpha = |z|$ 、 β 為 z 的幅角，其中 $0 \leq \beta < 2\pi$ (其中 π 為圓周率)。對任一正整數 n ，設實數 x_n 與 y_n 分別為 z^n 的實部與虛部。試選出正確選項。
- (1) 若 $\alpha = 1$ 且 $\beta = \frac{3\pi}{7}$ ，則 $x_{10} = x_3$ (2) 若 $y_3 = 0$ ，則 $y_6 = 0$ (3) 若 $x_3 = 1$ ，則 $x_6 = 1$
 (4) 若數列 $\langle y_n \rangle$ 收斂，則 $\alpha \leq 1$ (5) 若數列 $\langle x_n \rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n \rangle$ 也收斂

三、選填題(占 18 分)

9. 設 a, b, c, d 為實數。已知兩聯立方程組 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} ax + by = -1 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過相同的列運算後，分別得到 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$ 、 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$ ，則聯立方程組 $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ 的解為 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓， P 為 Γ 與 x 軸的其中一個交點。已知通過 P 點且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線交 Γ 於另一點 Q ，且 $\overline{PQ} = 1$ ，則 Γ 的半徑為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)
11. 設實數 a_1, a_2, \dots, a_9 是公差為 2 的等差數列，其中 $a_1 \neq 0$ 且 $a_3 > 0$ 。若 $\log_2 a_3, \log_2 b, \log_2 a_9$ 三數依序也成等差數列，其中 b 為 a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 其中一數，則 $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

坐標空間中，考慮三個平面 $E_1: x + y + z = 7$ 、 $E_2: x - y + z = 3$ 、 $E_3: x - y - z = -5$ 。令 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3 ； E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1 ； E_3 與 E_1 相交的直線為 L_2 。根據上述，試回答下列問題。

12. 已知三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 有共同交點，試求此共同交點 P 的坐標。(非選擇題，4 分)
13. 試說明 L_1 、 L_2 、 L_3 中，任兩直線所夾的銳角皆為 60° 。(非選擇題，4 分)
(註：令 L_1 與 L_2 所夾的銳角為 α ， L_2 與 L_3 所夾的銳角為 β ， L_3 與 L_1 所夾的銳角為 γ)
14. 若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1 、 E_2 、 E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，試求出 E_4 的方程式(寫成 $x + ay + bz = c$ 的形式)。(非選擇題，4 分)

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為三次函數 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 4$ 的函數圖形。根據上述，試回答下列問題。

15. 試問下列何者為 $f(x)$ 的導函數？(單選題，2 分)

- (1) $x^2 - 9x + 15$ (2) $3x^3 - 18x^2 + 15x - 4$ (3) $3x^3 - 18x^2 + 15x$
(4) $3x^2 - 18x + 15$ (5) $x^2 - 18x + 15$

16. 試說明 $P(1,3)$ 為 Γ 上之一點，並求 Γ 在 P 點的切線 L 的方程式。(非選擇題，4 分)

17. 承 16，試求 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積。(非選擇題，6 分)

2024年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：1.(5) 2.(2) 3.(4) 4.(1)(4) 5.(2)(3)(4) 6.(3)(4) 7.(1)(2)(5) 8.(2)(5)

選填題：9. $(-7,0)$ 10. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 11. $\frac{25}{2}$

混合題或非選擇題：12. $P(1,2,4)$ 13. 略 14. $x+y-z=11$ 或 $x+y-z=-13$
15. (4) 16. $y=3, 4$ 17. 108