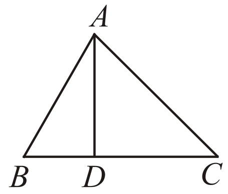
大學入學 113 年
分科測驗 數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 如右圖所示，有一ΔABC，已知$\overline{BC}$邊上的高$\overline{AD}=12$，且$\tan\angle B=\dfrac{3}{2}$、$\tan\angle C=\dfrac{2}{3}$。試問$\overline{BC}$的長度為何？
(1) 20　(2) 21　(3) 24　(4) 25　(5) 26
【113 分科測驗數甲】



答：(5)

解：$\tan B=\dfrac{3}{2}$，$\tan C=\dfrac{2}{3}$，$\overline{AD}=12$ $\Rightarrow \overline{BD}=8$，$\overline{CD}=18$ $\Rightarrow \overline{BC}=26$

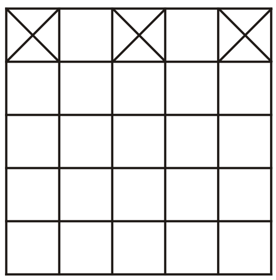
2. 坐標平面上，橢圓Γ的方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$（其中$a$為正實數）。若將$\Gamma$以原點$O$為中心，沿$x$軸方向伸縮為 2 倍、沿$y$軸方向伸縮為 3 倍後，所得到的新圖形會通過點$(18,0)$。試問下列哪一個選項是$\Gamma$的焦點？
(1) $(0,3\sqrt{3})$　(2) $(-3\sqrt{5},0)$　(3) $(0,6\sqrt{13})$　(4) $(-3\sqrt{13},0)$　(5) $(9,0)$
【113 分科測驗數甲】

答：(2)

解：$\left(\dfrac{x}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{18}\right)^2=1$過$(18,0)$ $\Rightarrow a=9$，Γ：$\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$

$\Rightarrow a=9$，$b=6$ $\Rightarrow c=3\sqrt{5}$　　$\therefore\Gamma$焦點$(\pm3\sqrt{5},0)$

3. 想在5×5的棋盤上擺放 4 個相同的西洋棋的城堡棋子。由於城堡會將同一行或是同一列的棋子吃掉，故擺放時規定每一行與每一列最多只能擺放一個城堡。在第一列的第一、三、五格（如圖示畫叉的格子）不擺放的情況下，試問共有多少種擺放方式？
(1) 216　(2) 240　(3) 288　(4) 312　(5) 360
【113 分科測驗數甲】



答：(4)

解：$\underbrace{5\times4\times3\times2}_{\text{第一列不排入}}+\underbrace{(2)\times C^4_3\times4\times3\times2}_{\text{第一列排入一個}}=120+8\times24=120+192=312$

二、多選題（佔 40 分）

4. 一遊戲廠商將舉辦抽獎活動，廠商公告每次抽獎需使用掉一個代幣，且每次抽獎的中獎機率皆為 $\frac{1}{10}$。某甲決定先存若干個代幣，並在活動開始後進行抽獎，直到用完所有代幣才停止。試選出正確的選項。
(1)某甲中獎一次所需要抽獎次數的期望值為 10
(2)某甲抽獎兩次就中獎一次以上的機率為 0.2
(3)某甲抽獎 10 次都沒中獎的機率小於抽獎 1 次就中獎的機率
(4)某甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9
(5)某甲只要存足夠多的代幣，就可以保證中獎的機率為 1　【113 分科測驗數甲】

答：(1)(4)

解：(1)期望值 $\frac{1}{p}=10$

(2) $1-\left(\frac{9}{10}\right)^2=0.19<0.2$

(3) $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\approx 0.348>\frac{1}{10}$

(4) $1-\left(\frac{9}{10}\right)^n>0.9\Rightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^n>10\Rightarrow n\left(\log 10-\log 9\right)>\log 10$

$\Rightarrow n>\frac{1}{1-0.9542}\approx 21.8\cdots\Rightarrow n\ge 22$

(5) $1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\xrightarrow{n\in N}<1$

5. 設 $f(x)$為三次實係數多項式。已知 $f(-2-3i)=0$（其中 $i=\sqrt{-1}$），
且 $f(x)$除以 x^2+x-2 的餘式為 18。試選出正確的選項。
(1) $f(2+3i)=0$　(2) $f(-2)=18$　(3) $f(x)$的三次項係數為負
(4) $f(x)=0$恰有一正實根　(5) $y=f(x)$圖形的對稱中心在第一象限
【113 分科測驗數甲】

答：(2)(3)(4)

解：$x=-2-3i\Rightarrow(x+2)^2=(-3i)^2\Rightarrow x^2+4x+4=-9\Rightarrow x^2+4x+13=0$

$f(x)=\left(x^2+4x+13\right)(ax+b)=\left(x^2+x-2\right)Q(x)+18$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=(18)(a+b)=18\Rightarrow a+b=1 \\ f(-2)=(9)(-2a+b)=18\Rightarrow -2a+b=2 \end{array}\right\} a=-\frac{1}{3}，b=\frac{4}{3}$$

$\therefore f(x)=\left(x^2+4x+13\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)=0$，三根為 4，$2\pm 3i$

$=-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{52}{3}$，對稱中心$\left(0,\frac{52}{3}\right)$

6. 坐標空間中，考慮滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$ 與外積 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$ 的兩向量 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$。
試選出正確的選項。
(1) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 θ（其中 $0\le\theta\le\pi$，π 為圓周率）大於 $\dfrac{\pi}{4}$
(2) $\overrightarrow{u}$ 可能為 $(1,0,-1)$
(3) $\left|\overrightarrow{u}\right|+\left|\overrightarrow{v}\right|\ge 2\sqrt{5}$
(4)若已知 $\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}$ 可以被唯一決定
(5)若已知 $\left|\overrightarrow{u}\right|+\left|\overrightarrow{v}\right|$，則 $\left|\overrightarrow{v}\right|$ 可以被唯一決定 【113 分科測驗數甲】

答：(3)(4)

解：(1) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\cos\theta=\sqrt{15}\\ \left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\sin\theta=\sqrt{10}\end{array}\right\rangle \tan\theta=\sqrt{\dfrac{2}{3}}<1$，$\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|=5$

(2) $(1,0,-1)$ 與 $(-1,0,3)$ 不垂直

(3) $\left|\overrightarrow{u}\right|+\left|\overrightarrow{v}\right|\ge 2\sqrt{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}=2\sqrt{5}$

(4)已知 $\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$、$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$，則知 $\overrightarrow{u}$

(5)可能兩解

7. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x)=x^5-5x^3+5x^2+5$ 與 $g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形（其中 π 為圓周率）。試選出正確的選項。
(1) $f'(1)=0$
(2) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為遞增
(3) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為凹向上
(4)對任意實數 x，$g(x+6\pi)=g(x)$
(5) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[3,4]$ 皆為遞增 【113 分科測驗數甲】

答：(1)(2)(5)

解：$f'(x)=5x^4-15x^2+10x=5x(x-1)^2(x+2)$，$f'(1)=0$

故在區間 $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ 內為遞增，在區間 $(-2,0)$ 內為遞減

$f''(x)=20x^3-30x+10=10(x-1)\left(2x^2+2x-1\right)$

故在區間 $\left(\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cup(1,\infty)$ 內為凹口向上，

在區間 $\left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},1\right)$ 內為凹口向下

$g(x)$ 週期 $2\pi\times\dfrac{3}{\pi}=6$，且在閉區間 $[3,4]$ 皆為遞增

8. 設 z 為非零複數，且設 $\alpha=|z|$、β 為 z 的輻角，其中 $0\le\beta\le 2\pi$（其中 π 為圓周率）。
對任一正整數 n，設實數 x_n 與 y_n 分別為 z^n 的實部與虛部。試選出正確選項。
(1)若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$，則 $x_{10}=x_3$
(2)若 $y_3=0$，則 $y_6=0$

(3)若 $x_3=1$，則 $x_6=1$　　　　(4)若數列 $\langle y_n \rangle$ 收斂，則 $\alpha \le 1$

(5)若數列 $\langle x_n \rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n \rangle$ 也收斂　　【113 分科測驗數甲】

答：(2)(5)

解：(1) $z=\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7} \Rightarrow x_{10}=\cos\frac{30\pi}{7}\ne x_3=\cos\frac{9\pi}{7}$

(2) $y_3=\sin 3\beta=0 \Rightarrow y_6=\sin 6\beta=0$

(3) $x_3=\cos 3=1 \Rightarrow x_6=\cos 6\beta=1$

(4) $\langle y_n \rangle$ 收斂 $\Rightarrow \alpha|\sin\beta|<1 \Rightarrow \alpha$ 不一定 ≤ 1

(5)正確：$\langle x_n \rangle$ 收斂 $\Rightarrow \alpha|\cos\beta|<1 \Rightarrow \alpha|\sin\beta|<1 \Rightarrow \langle y_n \rangle$ 收斂

三、選填題（佔 18 分）

9. 設 a,b,c,d 為實數。已知兩聯立方程組 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=1 \end{cases}$、$\begin{cases} ax+by=-1 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過相同的列運算後，分別得到 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$、$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$，則聯立方程組 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=1 \end{cases}$ 的解為 $x=$______，$y=$______。　　【113 分科測驗數甲】

答：$(-7,0)$

解：前解：$(x_1,y_1)=(5,2)$，後解：$(x_2,y_2)=(1,-1)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

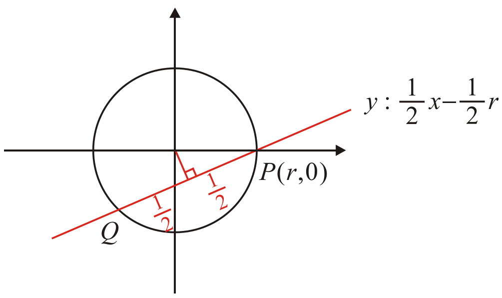
$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\times\frac{1}{-7}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{-7} & 7 \end{bmatrix}$

則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\times 7=\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓，P 為 Γ 與 x 軸的其中一個交點。已知通過 P 點且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線交 Γ 於另一點 Q，且 $\overline{PQ}=1$，則 Γ 的半徑為______。（化為最簡根式）

【113 分科測驗數甲】

答：$\frac{\sqrt{5}}{4}$



解：$d((0,0),x-2y-r=0)=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow \frac{|-r|}{\sqrt{5}}=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{5}}{4}$

11.設實數$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_9$是公差為 2 的等差數列，其中$a_1 \neq 0$且$a_3 > 0$。若$\log_2 a_3, \log_2 b, \log_2 a_9$三數依序也成等差數列，其中$b$為$a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$其中一數，則$a_9 =$________。（化為最簡分數） 【113 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{25}{2}$

解：$\log_2 a_3 + \log_2 a_9 = 2\log_2 b \Rightarrow (a_1+4)(a_1+16) = (a_1+2n)^2$

$\Rightarrow 20a_1 + 64 = 4na_1 + 4n^2 \xrightarrow{3 \le n \le 7 \text{ 且 } a_3 = a_1 + 4 > 0} n = 3$，$a_1 = -\dfrac{7}{2}$

則$a_9 = a_1 + 8 \times 2 = \dfrac{25}{2}$

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

12-14 題為題組

坐標空間中，考慮三個平面$E_1: x+y+z=7$、$E_2: x-y+z=3$、$E_3: x-y-z=-5$。令E_1與E_2相交的直線為L_3；E_2與E_3相交的直線為L_1；E_3與E_1相交的直線為L_2。根據上述，試回答下列問題。

12.已知三直線L_1、L_2、L_3有共同交點，試求此共同交點P的坐標。 【113 分科測驗數甲】

答：$P(1,2,4)$

解：$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+z=3 \\ x-y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$

13.試說明L_1、L_2、L_3中，任兩直線所夾的銳角皆為$60°$。

（註：令L_1與L_2所夾的銳角為α，L_2與L_3所夾的銳角為β，L_3與L_1所夾的銳角為γ）

【113 分科測驗數甲】

解：$L_1: \begin{cases} x-y+z=3 \\ x-y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=4 \end{cases}$，故$\overrightarrow{L_1} = (1,1,0)$

$L_2: \begin{cases} x-y-z=-5 \\ x+y+z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=s \\ z=6-s \end{cases}$，故$\overrightarrow{L_2} = (0,1,-1)$

$L_3: \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=m \\ y=2 \\ z=5-m \end{cases}$，故$\overrightarrow{L_3} = (1,0,-1)$

$\cos\alpha = \left| \dfrac{(1,1,0)\cdot(0,1,-1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

$$\cos\beta=\left|\frac{(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\beta=60^\circ$$

$$\cos\gamma=\left|\frac{(1,1,0)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\gamma=60^\circ$$

14.若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1、E_2、E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，試求出 E_4 的方程式。（寫成 $x+ay+bz=c$ 的形式）【113 分科測驗數甲】

答： $x+y-z=11$、$x+y-z=-13$

解： $\overrightarrow{E_4}\,//\,\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2}+\overrightarrow{L_3}=(2,2,-2)//(1,1,-1)$

邊長為 $6\sqrt{2}$，則高為 $\frac{\sqrt{6}}{3}\times6\sqrt{2}=4\sqrt{3}$

且 $d\left((1,2,4),x+y-z=k\right)=2\sqrt{3}\quad\Rightarrow\frac{|k+1|}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\quad\Rightarrow k=11$ 或 -13

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x-4$ 的函數圖形。根據上述，試回答下列問題。

15.試問下列何者為 $f(x)$ 的導函數？（單選題）

(1) $x^2-9x+15$　(2) $3x^3-18x^2+15x-4$　(3) $3x^3-18x^2+15x$

(4) $3x^2-18x+15$　(5) $x^2-18x+15$　【113 分科測驗數甲】

答：(4)

解： $f(x)=x^3-9x^2+15x-4\Rightarrow f'(x)=3x^2-18x+15$

16.試說明 $P(1,3)$ 為 Γ 上之一點，並求 Γ 在 P 點的切線 L 的方程式。【113 分科測驗數甲】

答： $y=3$

解：因為 $f(1)=1-9+15-4=3\Rightarrow P(1,3)\in y=f(x)$

又 $f'(1)=0\Rightarrow$ 切線： $y=3$

17.承 16，試求 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積。【113 分科測驗數甲】

答： 108

解： $y=3$ 與 $y=x^3-9x^2+15x-4$ 相交於點 $(1,3)$、$(7,3)$

所求 $=\int_1^7\left[3-\left(x^3-9x^2+15x-4\right)\right]dx=\int_1^7\left[-x^3+9x^2-15x+7\right]dx$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^3-\frac{15}{2}x^2+7x+C\right]\Bigg|_1^7=108$$