114 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 不透明袋中有藍、綠色球各若干顆，且球上皆有 1 或 2 的編號，其顆數如下表，例如標有 1 號的藍色球有 2 顆。從此袋中隨機抽取一球(每顆球被抽到的機率相等)，若已知抽到藍色球的事件與抽到 1 號球的事件互相獨立，試問 k 值為何？(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5　(5) 6

	藍	綠
1 號	2	4
2 號	3	k

2. 坐標平面上，$P(a,0)$為 x 軸上一點，其中 $a>0$。令 L_1、L_2 為通過 P 點，斜率分別為 $-\dfrac{4}{3}$、$-\dfrac{3}{2}$ 的直線。已知 L_1、L_2 分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 3，試問 a 值為何？(1) $3\sqrt{2}$　(2) 6　(3) $6\sqrt{2}$　(4) 9　(5) $8\sqrt{2}$
3. 某校舉辦音樂會，包含鋼琴表演 5 個、小提琴表演 4 個、歌唱表演 3 個等三類表演共 12 個不同曲目。該校想將同類表演排在一起，且歌唱必須排在鋼琴之後或是小提琴之後。試問這場音樂會可能的曲目排列方式共有幾種？
(1) $5!\times4!\times3!$　(2) $2\times5!\times4!\times3!$　(3) $3\times5!\times4!\times3!$　(4) $4\times5!\times4!\times3!$　(5) $6\times5!\times4!\times3!$
4. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。試問在函數圖形 $y=\log_2 x$、x 軸與直線 $x=\dfrac{61}{2}$ 所圍有界區域的內部(不含邊界)共有多少個格子點？
(1) 88　(2) 89　(3) 90　(4) 91　(5) 92
5. 設 $0\le\theta\le2\pi$，已知所有滿足 $\sin2\theta>\sin\theta$ 且 $\cos2\theta>\cos\theta$ 的 θ 可表為 $a\pi<\theta<b\pi$，其中 a,b 為實數，試問 $b-a$ 值為何？(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{2}{3}$　(4) $\dfrac{3}{4}$　(5) 1
6. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$。已知 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2,-1,0)$，且 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(-1,2,3)$。試問由 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ 所張出的平行六面體之體積為何？
(1) $2\sqrt{5}$　(2) $5\sqrt{2}$　(3) $2\sqrt{10}$　(4) $4\sqrt{5}$　(5) $4\sqrt{10}$

二、多選題(占 30 分)

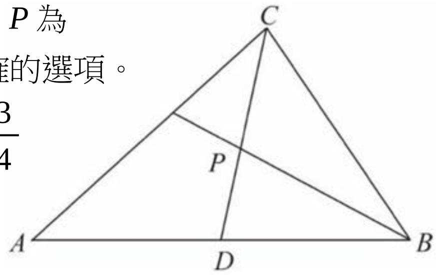
7. 已知數列 $<a_n>$ 滿足 $3a_{n+1}=a_n+n$ (對任意正整數 n 都成立)且 $a_1=2$。令數列 $<b_n>$ 滿足 $b_n=a_n-\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{4}$。試選出正確的選項。(1) $a_2=2$　(2) $b_2=\dfrac{3}{4}$　(3)數列 $<b_n>$ 是公比為 $\dfrac{2}{3}$ 的等比數列　(4)對於任意正整數 n，$3^n a_n$ 皆為正整數　(5) $b_{10}<10^{-4}$
8. 考慮坐標平面上滿足方程式 $\dfrac{2^{x^2}}{8}=\dfrac{4^x}{2^{y^2}}$ 的點 $P(x,y)$，試選出正確的選項。
(1)當 $x=3$ 時，滿足此方程式的解有相異 2 個　(2)若點 (a,b) 滿足此方程式，則點 $(-a,-b)$ 也滿足此方程式　(3)所有可能的點 $P(x,y)$ 構成的圖形為一個圓
(4)點 $P(x,y)$ 可能在直線 $x+y=4$ 上　(5)對於所有可能的點 $P(x,y)$，其 $x-y$ 的最大值為 $1+2\sqrt{2}$
9. 設 b、c 為實數。已知二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 有實根，但二次方程式 $x^2+(b+2)x+c=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。(1) $c<0$　(2) $b<0$　(3) $x^2+(b+1)x+c=0$ 有實根
(4) $x^2+(b+2)x-c=0$ 有實根　(5) $x^2+(b-2)x+c=0$ 有實根

10.令Γ為坐標平面上$y=\sin\pi x$在$0\le x\le 3$內之函數圖形。一水平直線L：$y=k$與Γ相交，其中三交點$P\left(x_1,k\right)$、$Q\left(x_2,k\right)$、$R\left(x_3,k\right)$滿足$x_1<x_2<1<x_3$。試選出正確的選項。

(1)$k>0$ (2)L與Γ恰有 3 個交點 (3)$x_1+x_2<1$ (4)若$2\overline{PQ}=\overline{QR}$，則$k=\dfrac{1}{2}$

(5)L與Γ所有交點的x坐標之和大於 5

11.在ΔABC中，$\overline{AB}=6,\overline{AC}=5,\overline{BC}=4$，令$\overline{AB}$中點為$D$，$P$為$\angle ABC$之角平分線與$\overline{CD}$之交點，如圖所示。試選出正確的選項。



(1)$\overline{CP}=\dfrac{3}{7}\overline{CD}$ (2) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$ (3)$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{4}$

(4)ΔACP面積為$\dfrac{15}{14}\sqrt{7}$ (5)(內積) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{120}{7}$

12.某種合金由甲和乙兩種金屬組成，某生想知道其中金屬比例與合金的波長關係。他做實驗測量「甲占比為x%的合金所對應的波長y(單位：奈米)」，並將得到的 20 筆數據$\left(x_k,y_k\right)$，$k=1,\cdots,20$，在xy平面上標出對應的點，其迴歸直線(最適直線)為$y=21.3x-40$。為符合投稿規範，須將報告描述為「乙占比為u%的合金所對應的波長v(單位：微米)」，他將數據$\left(x_k,y_k\right)$轉換為$\left(u_k,v_k\right)$，$k=1,\cdots,20$，得到在uv平面的迴歸直線為$v=au+b$。已知 1 奈米$=10^{-9}$公尺，1 微米$=10^{-6}$公尺。試選出正確的選項。

(1)$u_k=100-x_k$，$k=1,\cdots,20$ (2)$v_k=1000y_k$，$k=1,\cdots,20$ (3)$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_{20}$的標準差等於$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{20}$的標準差 (4)$b=2.09$ (5)某生發現有另一筆數據$\left(u_{21},v_{21}\right)$，且滿足$v_{21}=au_{21}+b$；若將這 21 筆數據$\left(u_k,v_k\right)$，$k=1,\cdots,21$，在$uv$平面上標出對應的點，則其迴歸直線仍為$v=au+b$

三、選填題(占 25 分)

13.已知實係數三次多項式$f\left(x\right)$除以$x+6$得商式$q\left(x\right)$和餘式 3。若$q\left(x\right)$在$x=-6$有最大值 8，則$y=f\left(x\right)$圖形的對稱中心坐標為________。

14.坐標空間中，已知點A的坐標為$\left(a,b,c\right)$，其中a,b,c皆為小於 0 的實數，且知點A與三平面E_1：$4y+3z=2$、E_2：$3y+4z=-5$、E_3：$x+2y+2z=-2$的距離都是 6，則$a+b+c=$________。

15.假日市集有個攤位推出「試試手氣，定價 480 元的可愛玩偶最低只要 240 元」。規則為：顧客投擲一枚均勻硬幣至多 5 次，前 3 次連續擲得 3 個正面者則只能以 240 元購得一個玩偶，擲到第 4 次才累積得 3 個正面者則只能以 320 元購得一個，擲到第 5 次才累積得 3 個正面者則只能以 400 元購得一個；5 次投完仍未累積 3 個正面者則只能以 480 元購得一個。參與此遊戲的顧客購得一個玩偶所花金額的期望值為________元。

16.坐標平面上，設 L_1 、 L_2 為通過點 $(3,1)$ 且斜率分別為 m 、 $-m$ 的兩條直線，其中 m 為一實數。另設 Γ 為圓心在原點的一個圓。已知 Γ 與 L_1 交於相異兩點 A 、 B ，且知圓心到 L_1 的距離為 1，又 Γ 與 L_2 相切，則弦 $\overline{AB}$ 的長度為________。(化為最簡分數)

17.ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$ ， $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{8}$ 。在 ΔABC 的外接圓上有一點 D 滿足 $\overline{BD}=4$ ，且 $\overline{AD}\le\overline{CD}$ ，則 $\overline{CD}=$________。（化為最簡根式）

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

已知 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ 皆為坐標平面上以原點 O 為中心，逆時針旋轉一銳角的旋轉矩陣，且滿足 $A^2=B^3=\begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$ ，其中 c,d 為實數。設點 $P(1,1)$ 經 A^3 變換後為點 Q ，且點 Q 經 B^4 變換後為點 R 。根據上述，試回答下列問題。

18.試問 c 之值為何？(單選題，3 分) (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) $-\dfrac{1}{2}$ (5) $\dfrac{1}{2}$

19.試求點 Q 的坐標，以及 $\overrightarrow{OR}$ 與向量 $(1,0)$ 的夾角。(非選擇題，6 分)

20.設 L 為過點 P 且與直線 OQ 平行的直線，點 S 為 L 和直線 OR 的交點，試求 $\angle OSP$ ，並求點 S 的坐標。(非選擇題，6 分)

2025 年大學學科能力測驗(數學 A) 參考答案

選擇題：1.(5) **2.**(2) **3.**(4) **4.**(3) **5.**(1) **6.**(3) **7.**(2)(4) **8.**(3)(5) **9.**(2)(4)(5) **10.**(1)(4)(5)
11.(3)(4)(5) **12.**(1)(3)(4)(5)

選填題：13. $(-6,3)$ **14.** -11 **15.** 405 **16.** $\dfrac{24}{5}$ **17.** $3+\sqrt{2}$

混合題或非選擇題：

18. (2) **19.** $Q(-\sqrt{2},0)$ ， 60° **20.** $\angle OSP = 60^\circ, S(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1)$