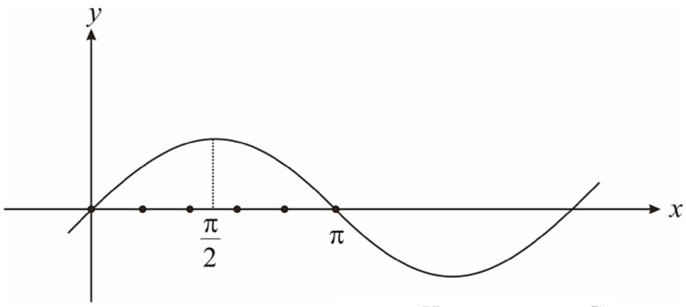
大學入學 114 年分科測驗數學甲

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題占 76 分)

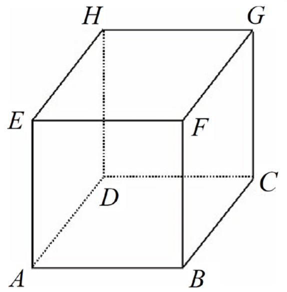
一、單選題(占 18 分)

1. 坐標平面上，函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$，如圖所示。試選出在 $0<\theta\le\pi$ 的範圍中滿足 $\sin\theta=\sin(\theta+\dfrac{\pi}{5})$ 的 θ 值。



(1) $\dfrac{\pi}{5}$ (2) $\dfrac{2\pi}{5}$ (3) $\dfrac{3\pi}{5}$
(4) $\dfrac{4\pi}{5}$ (5) π

2. 空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$，其中頂點 A、B、C、D 在同一個平面上，且 $\overline{AE}$ 為其中一個邊，如圖所示。
下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。
(1)平面 ADH (2)平面 BCD (3)平面 CDG
(4)平面 DFG (5)平面 DFH



3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C_2^3=3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 Γ_1：$x^2+y^2=4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 Γ_2：$x^2+y^2=2$ 與直線 $x-y=0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x+y=0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？ (1) 12 (2) 16 (3) 20 (4) 24 (5) 28

二、多選題(占 40 分)

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。
(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (3) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$
(4) $y=\dfrac{4}{9}x^2$ (5) $x=\dfrac{4}{9}y^2$

5. 有一實數數列 $<a_n>$，其中 $a_n=\cos(n\pi-\dfrac{\pi}{6})$，$n$ 為正整數。試選出正確的選項。
(1) $a_1=-\dfrac{1}{2}$ (2) $a_2=a_3$ (3) $a_4=a_{24}$ (4) $<a_n>$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<1$
(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^n=3-2\sqrt{3}$

6. 設指數函數 $f(x)=1.2^x$。試選出正確的選項。 (1) $f(0)>0$ (2) $f(10)>10$
(3)坐標平面上，$y=1.2^x$ 的圖形與直線 $y=x$ 相交 (4)坐標平面上，$y=1.2^x$ 與 $y=\log(1.2^x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ (5)對任意正實數 b，$\log_{1.2}b\ne1.2^b$

7. 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數大於 5，且其最高次項係數為正。又 $f(x)$ 在 $x=1$、2、4 處有極小值，且在 $x=3$、5 處有極大值。根據上述，試選出正確的選項。
(1) $f(1)<f(3)$ (2)存在實數 a,b 滿足 $1<a<b<2$，使得 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)<0$
(3) $f''(3)>0$ (4)存在實數 $c>5$，使得 $f'(c)>0$ (5) $f(x)$ 的次數大於 7

8. 設複數 z 的虛部不為 0 且 $|z|=2$。已知在複數平面上，1、z、z^3 共線。試選出正確的選項。 (1) $z\cdot\bar{z}=2$　(2) $\dfrac{z^3-z}{z-1}$ 的虛部為 0　(3) z 的實部為 $-\dfrac{1}{2}$　(4) z 滿足 $z^2-z+4=0$
(5)在複數平面上，-2、z、z^2 共線

三、選填題(占 18 分)

9. 令 A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，且令 B 為以 x 軸為鏡射軸(對稱軸)的鏡射矩陣。令 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$、$BA=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$。已知 $a_1+a_2+a_3+a_4=2(c_1+c_2+c_3+c_4)$，則 $\tan\theta=$ ________。(化為最簡分數)

10. 坐標空間中一平面與平面 $x=0$、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1、L_2。已知 L_1、L_2 互相平行，且 L_1 通過點 $(0,2,-11)$、L_2 通過點 $(8,21,0)$，則 L_1、L_2 的距離為________。
(化為最簡根式)

11. 坐標平面上有一平行四邊形 Γ，其中兩邊所在的直線與 $5x-y=0$ 平行、另兩邊所在的直線與 $3x-2y=0$ 垂直。令 Γ 的兩對角線交點為 Q。已知 Γ 有一頂點 P，滿足 $\overrightarrow{PQ}=(10,-1)$，則 Γ 的面積為________。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為 $\dfrac{2}{5}$。參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。根據上述，試回答下列問題。

12. 若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？(單選題，2 分)
(1) $(\frac{2}{5})^2$　(2) $(\frac{2}{5})^3$　(3) $(\frac{3}{5})^2$　(4) $(\frac{3}{5})^3$　(5) $(\frac{2}{5})\times(\frac{3}{5})^2$

13. 若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用 Σ 符號表示所需抽獎**次數**的期望值，並求其值。(非選擇題，4 分)

14. 假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付**金額**的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

設實係數多項式函數 $f(x)=3ax^2+(1-a)$ ，其中 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$ 。在坐標平面上，令 Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1\le x\le 1$ 所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15. 證明當 $-1\le x\le 1$ 時， $f\left(x\right)\ge 0$ 皆成立。(非選擇題，4 分)

16. 證明對於所有 $a\in[-\frac{1}{2},1]$ ，Γ 的面積皆為 2。(非選擇題，2 分)

17. 令 V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有 $a\in[-\frac{1}{2},1]$ ，V 是否都相等？若相等，則求其值；若不相等，則當 a 為多少時，V 有最大值，並求此最大值。(非選擇題，6 分)

參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$

對數值：$\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771,\log 5\approx 0.6990,\log 7\approx 0.8451$

2025年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：1.(2)　**2.**(1)　**3.**(3)　**4.**(3)(4)　**5.**(3)(5)　**6.**(1)(3)　**7.**(2)(4)(5)　**8.**(2)(3)(5)

選填題：9. $\frac{-1}{2}$　**10.** $\sqrt{185}$　**11.** 204

混合題或非選擇題：12. (3)　**13.** $\frac{5}{2}$　**14.** 方式一期望值252 $>$ 方式二期望值250

15. 如下　**16.** 如下　**17.** 當 $a=1$ 時，V 有最大值 $\frac{18\pi}{5}$

15. 證明

當 $0<a\le 1$，$-1\le x\le 1$ 又 $0\le 1-a<1$，且 $1<1+2a\le 3$ $\Rightarrow 0\le f(x)\le 3$

當 $a=0$，$f(x)$ 恆為 1

當 $-\frac{1}{2}\le a<0$，$-1\le x\le 1$ 又 $1<1-a\le\frac{3}{2}$ 且 $0\le 1+2a<1$ $\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{3}{2}$

綜合上述：當 $-1\le x\le 1$，$f(x)\ge 0$ 恆成立

16. 證明

$$\int_{-1}^{1}\pi\left[f(x)\right]^2\,dx=2\pi\int_0^1\left[9a^2x^4+6a(1-a)x^2+(1-a)^2\right]dx$$

$$=2\pi\left[\frac{9}{5}a^2x^5+2a(1-a)x^3+(1-a)^2x+c\right]\Big|_0^1=2\pi\left[\frac{4}{5}a^2+1\right]$$

又 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$ $\Rightarrow 0\le a^2\le 1$

$\Rightarrow$ 當 $a^2=1$，即 $a=1$ 時，有 V 的最大值 $\frac{18}{5}\pi$