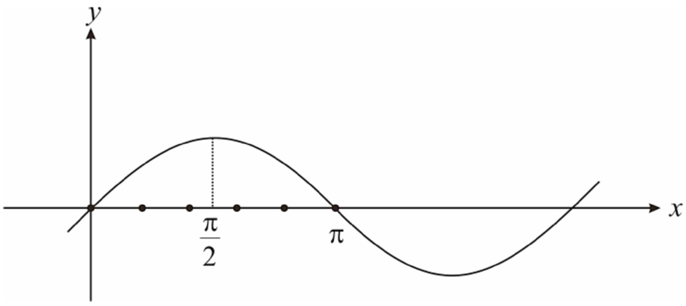
大學入學 114 年(113 學年度)
分科測驗 數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 坐標平面上，函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$，如圖所示。試選出在 $0<\theta\le\pi$ 的範圍中滿足 $\sin\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的 θ 值。

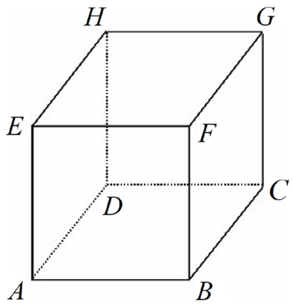


(1) $\dfrac{\pi}{5}$　(2) $\dfrac{2\pi}{5}$　(3) $\dfrac{3\pi}{5}$　(4) $\dfrac{4\pi}{5}$　(5) π　【114 分科測驗數甲】

答：(2)

解：$\dfrac{\theta+\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow \theta=\dfrac{2\pi}{5}$

2. 空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$，其中頂點 A、B、C、D 在同一個平面上，且 $\overline{AE}$ 為其中一個邊，如圖所示。下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。



(1)平面 ADH
(2)平面 BCD
(3)平面 CDG
(4)平面 DFG
(5)平面 DFH　【114 分科測驗數甲】

答：(1)

解：與 $BGHA$ 平面、$CFED$ 平面均垂直 $\Rightarrow$ $ADHE$、$BCGF$

3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C^3_2=3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 Γ_1：$x^2+y^2=4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 Γ_2：$x^2+y^2=2$ 與直線 $x-y=0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x+y=0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？

(1) 12　(2) 16　(3) 20　(4) 24　(5) 28　【114 分科測驗數甲】

答：(3)

解：$C_2^8 - C_2^3 \times 4 + 4 = 28 - 12 + 4 = 20$

二、多選題（佔 40 分）

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。
(1) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　(2) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　(3) $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
(4) $y = \dfrac{4}{9}x^2$　(5) $x = \dfrac{4}{9}y^2$　【114 分科測驗數甲】

答：(3)(4)

解：(1) $x > 3$ 或 $x < -3$ 時，不相交
(2) $-3 < x < 3$ 時，不相交
(5) $x < 0$ 時，不相交

5. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$，其中 $a_n = \cos\left(n\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$，$n$ 為正整數。試選出正確的選項。
(1) $a_1 = -\dfrac{1}{2}$　(2) $a_2 = a_3$　(3) $a_4 = a_{24}$　(4) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 1$
(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = 3 - 2\sqrt{3}$　【114 分科測驗數甲】

答：(3)(5)

解：$a_1 = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a_3 = a_5 = \cdots$

$a_2 = \cos\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a_4 = a_6 = \cdots$

故 $\langle a_n \rangle$ 發散

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \cdots$

$$= \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{1} = 3 - 2\sqrt{3}$$

6. 設指數函數 $f(x) = 1.2^x$。試選出正確的選項。
(1) $f(0) > 0$
(2) $f(10) > 10$
(3)坐標平面上，$y = 1.2^x$ 的圖形與直線 $y = x$ 相交
(4)坐標平面上，$y = 1.2^x$ 與 $y = \log\left(1.2^x\right)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$

(5)對任意正實數b，$\log_{1.2} b \neq 1.2^{b}$ 【114 分科測驗數甲】

答：(1)(3)

解：(1) $f(0)=1$

(2) $f(10)=(1.2)^{10}=\left(10^{\log 6-\log 5}\right)^{10} \fallingdotseq 10^{0.791}<10^{1}$

(3) $y=1.2^{x}$ 與 $y=x$ 交於 2 點

(4) $y=1.2^{x}$ 與 $y=\log_{1.2} x$ 關於 $y=x$ 成對稱

(5) $y=1.2^{x}$ 與 $y=\log_{1.2} x$ 交於 2 點

7. 已知實係數多項式$f(x)$的次數大於 5，且其最高次項係數為正。又$f(x)$在$x=1$、2、4處有極小值，且在$x=3$、5 處有極大值。根據上述，試選出正確的選項。

(1) $f(1)<f(3)$

(2)存在實數a,b滿足$1<a<b<2$，使得$f'(a)>0$且$f'(b)<0$

(3) $f''(3)>0$

(4)存在實數$c>5$，使得$f'(c)>0$

(5) $f(x)$的次數大於 7 【114 分科測驗數甲】

答：(2)(4)(5)

解：(1)極小值可能大於極大值

(2)正確，區間$(1,2)$內有極大值，故存在$1<a<b<2$，使$f'(a)>0$且$f'(b)<0$

(3)因凹口向下，應為$f''(3)<0$

(4)正確，因領導係數為正

(5)正確，至少 3 極大值，5 極小值，故$\deg f(x)\geq 8$

8. 設複數z的虛部不為 0 且$|z|=2$。已知在複數平面上，1、z、z^{3}共線。試選出正確的選項。

(1) $z\cdot\bar{z}=2$

(2) $\dfrac{z^{3}-z}{z-1}$ 的虛部為 0

(3) z 的實部為$-\dfrac{1}{2}$

(4) z 滿足$z^{2}-z+4=0$

(5)在複數平面上，-2、z、z^{2}共線 【114 分科測驗數甲】

答：(2)(3)(5)

解：(1) $z\cdot\bar{z}=|z|^{2}=2^{2}$

(2)1、z、z^{3}共線，故$z^{3}-z=t(z-1)\xrightarrow{t\in R}$故$\dfrac{z^{3}-z}{z-1}$的虛部為 0

(3) $\dfrac{z^{3}-z}{z-1}=z^{2}+z\in R\xrightarrow[\Rightarrow z^{2}=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)]{z=2(\cos\theta+i\sin\theta)}4\sin 2\theta+2\sin\theta=0$

$\Rightarrow 8\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta=0\xrightarrow{\sin\theta\neq 0}\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，故$z$的實部為$-\dfrac{1}{2}$

(4)承(3)，$z^2+z=4\cos 2\theta+2\cos\theta=4\left(2\cos^2\theta-1\right)+2\cos\theta=-4$

(5)斜率$\dfrac{2\cos\theta+2}{4\cos 2\theta-2\cos\theta}=-\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{2\sin\theta}{4\sin 2\theta-2\sin\theta}=-\dfrac{1}{2}$，故$-2$、$z$、$z^2$共線

三、選填題（佔 18 分）

9. 令A為以原點為中心逆時針旋轉θ角的旋轉矩陣，且令B為以x軸為鏡射軸（對稱軸）的鏡射矩陣。令$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$、$BA=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$。已知$a_1+a_2+a_3+a_4=2\left(c_1+c_2+c_3+c_4\right)$，則$\tan\theta=$________。（化為最簡分數）
【114 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{-1}{2}$

解：$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=2\cos\theta$

$BA=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ $\Rightarrow c_1+c_2+c_3+c_4=-2\sin\theta$

依題意$\Rightarrow 2\cos\theta=2\left(-2\sin\theta\right)$ $\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-1}{2}$

10. 坐標空間中一平面與平面$x=0$、平面$z=0$分別交於直線L_1、L_2。已知L_1、L_2互相平行，且L_1通過點$\left(0,2,-11\right)$、L_2通過點$\left(8,21,0\right)$，則L_1、L_2的距離為________。（化為最簡根式）
【114 分科測驗數甲】

答：$\sqrt{185}$

解：$\left(0,2,-11\right)$在L_2上投影點$\left(8,2,0\right)$

$d\left(L_1,L_2\right)=\sqrt{8^2+0^2+\left(-11\right)^2}=\sqrt{185}$

11. 坐標平面上有一平行四邊形Γ，其中兩邊所在的直線與$5x-y=0$平行、另兩邊所在的直線與$3x-2y=0$垂直。令Γ的兩對角線交點為Q。已知Γ有一頂點P，滿足$\overrightarrow{PQ}=\left(10,-1\right)$，則$\Gamma$的面積為________。
【114 分科測驗數甲】

答：204

解：不失其一般性，令兩邊$5x-y=0$，$2x+3y=0$

頂點$P\left(0,0\right)$，中心點$Q\left(10,-1\right)$，頂點$R\left(20,-2\right)$

則另二頂點$\left(2,10\right)$、$\left(18,-12\right)$

面積$=\left\|\begin{matrix} 2 & 10 \\ 18 & -12 \end{matrix}\right\|=204$

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

12-14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為$\dfrac{2}{5}$。參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。

根據上述，試回答下列問題。

12.若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？（單選題）

(1)$\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ (2)$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ (3)$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ (4)$\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$ (5)$\left(\dfrac{2}{5}\right)\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

【114 分科測驗數甲】

答：(3)

解：兩次皆不中$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

13.若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用Σ符號表示所需抽獎**次數**的期望值，並求其值。【114 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{5}{2}$

解：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}1\times k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times\frac{2}{5}=1\times\frac{2}{5}+2\times\left(\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}+\cdots$$

$$\frac{3}{5}E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}1\times k\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\times\frac{2}{5}=1\times\left(\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}+2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}+\cdots$$

相減$\Rightarrow \dfrac{2}{5}E(X)=\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\times\dfrac{2}{5}+\cdots$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}E(X)\ \Rightarrow E(X)=\frac{5}{2}\Rightarrow E\left(X_{\$}\right)=100\times\frac{5}{2}=250$$

解：$X\sim G\left(\dfrac{2}{5}\right)\Rightarrow E(X)=\dfrac{1}{\frac{2}{5}}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow E\left(X_{\$}\right)=100\times\dfrac{5}{2}=250$

14.假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付**金額**的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。【114 分科測驗數甲】

答：方式一期望值 $252>$方式二期望值 250

解：方式一$E\left(X'_{\$}\right)=225\times\left[\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{2}{5}\right]+300\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=252$

方式一$E(X'_{\$})>$方式二$E(X_{\$})$

15-17 題為題組

設實係數多項式函數$f(x)=3ax^2+(1-a)$，其中$-\frac{1}{2}\le a\le 1$。在坐標平面上，令Γ為$y=f(x)$與x軸在$-1\le x\le 1$所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15.證明當$-1\le x\le 1$時，$f(x)\ge 0$皆成立。【114 分科測驗數甲】

證：當$0<a\le 1$，$-1\le x\le 1$

又$0\le 1-a<1$，且$1<1+2a\le 3$ $\Rightarrow 0\le f(x)\le 3$

當$a=0$，$f(x)$恆為 1

當$-\frac{1}{2}\le a<0$，$-1\le x\le 1$

又$1<1-a\le\frac{3}{2}$且$0\le 1+2a<1$ $\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{3}{2}$

綜合上述：當$-1\le x\le 1$，$f(x)\ge 0$恆成立

16.證明對於所有$a\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$\Gamma$的面積皆為 2。【114 分科測驗數甲】

證：$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}\left[3ax^2+(1-a)\right]dx=2\left[ax^3+(1-a)x+c\right]\Big|_0^1=2$

17.令V為Γ繞x軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有$a\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$V$是否都相等？若相等，則求其值；若不相等，則當$a$為多少時，$V$有最大值，並求此最大值。【114 分科測驗數甲】

答：當$a=1$時，V有最大值$\frac{18\pi}{5}$

解：$\int_{-1}^{1}\pi[f(x)]^2\,dx=2\pi\int_0^1\left[9a^2x^4+6a(1-a)x^2+(1-a)^2\right]dx$

$=2\pi\left[\frac{9}{5}a^2x^5+2a(1-a)x^3+(1-a)^2x+c\right]\Big|_0^1=2\pi\left[\frac{4}{5}a^2+1\right]$

又$-\frac{1}{2}\le a\le 1$ $\Rightarrow 0\le a^2\le 1$ $\Rightarrow$當$a^2=1$，即$a=1$時，

有V的最大值$\frac{18}{5}\pi$