

114 年大學入學學力測驗數學(數 A)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 不透明袋中有藍、綠色球各若干顆，且球上皆有 1 或 2 的編號，其顆數如下表，例如標有 1 號的藍色球有 2 顆。

	藍	綠
1 號	2	4
2 號	3	k

從此袋中隨機抽取一球(每顆球被抽到的機率相等)，若已知抽到藍色球的事件與抽到 1 號球的事件互相獨立，試問 k 值為何？

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

【114 年學測數 A】

答：(5)

解： $P(\text{藍} \cap 1) = P(\text{藍}) \times P(1) \Rightarrow \frac{2}{2+4+3+k} = \frac{2+3}{2+4+3+k} \times \frac{2+4}{2+4+3+k} \Rightarrow k = 6$

2. 坐標平面上， $P(a, 0)$ 為 x 軸上一點，其中 $a > 0$ 。令 L_1 、 L_2 為通過 P 點，斜率分別為 $-\frac{4}{3}$ 、 $-\frac{3}{2}$ 的直線。已知 L_1 、 L_2 分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 3，試問 a 值為何？

- (1) $3\sqrt{2}$ (2) 6 (3) $6\sqrt{2}$ (4) 9 (5) $8\sqrt{2}$

【114 年學測數 A】

答：(2)

解：令 $P(a, 0) = (6t, 0)$ ，則 $Q(0, 8t)$ ， $R(0, 9t)$ ，故 $\frac{t \times 6t}{2} = 3 \Rightarrow t = 1$ ， $a = 6$

3. 某校舉辦音樂會，包含鋼琴表演 5 個、小提琴表演 4 個、歌唱表演 3 個等三類表演共 12 個不同曲目。該校想將同類表演排在一起，且歌唱必須排在鋼琴之後或是小提琴之後。試問這場音樂會可能的曲目排列方式共有幾種？

- (1) $5! \times 4! \times 3!$ (2) $2 \times 5! \times 4! \times 3!$ (3) $3 \times 5! \times 4! \times 3!$
(4) $4 \times 5! \times 4! \times 3!$ (5) $6 \times 5! \times 4! \times 3!$

【114 年學測數 A】

答：(4)

解： $\underbrace{(2! \times 5! \times 4!)}_{\text{鋼, 小}} \times \underbrace{2 \times 3!}_{\text{歌}} = (4)$

4. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。試問在函數圖形 $y = \log_2 x$ 、 x 軸與直線 $x = \frac{61}{2}$ 所圍有界區域的內部(不含邊界)共有多少個格子點？

- (1) 88 (2) 89 (3) 90 (4) 91 (5) 92

【114 年學測數 A】

答：(3)

$$\begin{array}{l} \text{解：} \left. \begin{array}{l} y=1, x=3\sim 30 \quad \text{共 28 個} \\ y=2, x=5\sim 30 \quad \text{共 26 個} \\ y=3, x=9\sim 30 \quad \text{共 22 個} \\ y=4, x=17\sim 30 \quad \text{共 14 個} \end{array} \right\} \text{共 90 個} \end{array}$$

5. 設 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，已知所有滿足 $\sin 2\theta > \sin \theta$ 且 $\cos 2\theta > \cos \theta$ 的 θ 可表為 $a\pi < \theta < b\pi$ ，其中 a, b 為實數，試問 $b-a$ 值為何？

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) 1

【114 年學測數 A】

答：(1)

$$\text{解：} \sin 2\theta > \sin \theta \Rightarrow \sin \theta (2\cos \theta - 1) > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \pi < \theta < \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos 2\theta > \cos \theta \Rightarrow (2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) > 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{綜合上述：} \pi < \theta < \frac{4\pi}{3} \xrightarrow{b=\frac{4}{3}, a=1} b-a = \frac{1}{3}$$

6. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 。已知 $\vec{u} - \vec{v} = (2, -1, 0)$ ，且 $\vec{v} - \vec{w} = (-1, 2, 3)$ 。試問由 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 所張出的平行六面體之體積為何？

- (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{10}$ (4) $4\sqrt{5}$ (5) $4\sqrt{10}$

【114 年學測數 A】

答：(3)

$$\text{解：} (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = -|\vec{v}|^2 = -4 \Rightarrow |\vec{v}| = 2$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = 5 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 5 \Rightarrow |\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = 14 \Rightarrow |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = 14 \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{10}$$

$$\text{所求} = |\vec{u}| |\vec{v}| |\vec{w}| = 1 \times 2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

二、多選題（占 30 分）

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $3a_{n+1} = a_n + n$ （對任意正整數 n 都成立）且 $a_1 = 2$ 。

令數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_n = a_n - \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $a_2 = 2$ (2) $b_2 = \frac{3}{4}$ (3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 是公比為 $\frac{2}{3}$ 的等比數列

- (4) 對於任意正整數 n ， $3^n a_n$ 皆為正整數 (5) $b_{10} < 10^{-4}$

【114 年學測數 A】

答：(2)(4)

$$\text{解：} a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = \frac{4}{3}, a_5 = \frac{16}{3^2}, a_6 = \frac{61}{3^3}, \dots 3^n a_n \in \mathbb{N}$$

$$b_1 = \frac{9}{4}, b_2 = \frac{3}{4}, b_3 = \frac{1}{4}, b_4 = \frac{1}{12}, \dots \left(\text{公比 } \frac{1}{3}\right) \dots$$

$$\Rightarrow b_{10} = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^7} = \frac{1}{8748} > \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

8. 考慮坐標平面上滿足方程式 $\frac{2^{x^2}}{8} = \frac{4^x}{2^{y^2}}$ 的點 $P(x, y)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 當 $x = 3$ 時，滿足此方程式的解有相異 2 個
- (2) 若點 (a, b) 滿足此方程式，則點 $(-a, -b)$ 也滿足此方程式
- (3) 所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一個圓
- (4) 點 $P(x, y)$ 可能在直線 $x + y = 4$ 上
- (5) 對於所有可能的點 $P(x, y)$ ，其 $x - y$ 的最大值為 $1 + 2\sqrt{2}$

【114 年學測數 A】

答：(3)(5)

解：原式 $\Rightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{2x+3} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$

(1) $x = 3$ 時 $y = 0$

(2) 應為 $(-a+2, -b)$

(3) 正確

(4) $\because d((1, 0), x+y=4) = \frac{3}{\sqrt{2}} > \text{半徑 } 2 \therefore \text{無交點}$

(5) $x - y = k$ 與圓相切， $k = 2\sqrt{2} + 1$ 或 $-2\sqrt{2} + 1$

9. 設 b, c 為實數。已知二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 有實根，但二次方程式 $x^2 + (b+2)x + c = 0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

- (1) $c < 0$ (2) $b < 0$ (3) $x^2 + (b+1)x + c = 0$ 有實根
- (4) $x^2 + (b+2)x - c = 0$ 有實根 (5) $x^2 + (b-2)x + c = 0$ 有實根

【114 年學測數 A】

答：(2)(4)(5)

解：由 $b^2 - 4c > 0$ 且 $(b+2)^2 - 4c < 0 \Rightarrow b^2 > 4c > (b+2)^2$
 $\Rightarrow b < -1$ 且 $c > 0$

則 (3) $(b+1)^2 - 4c < 0$ (4) $(b+2)^2 + 4c > 0$

(5) $(b-2)^2 - 4c = b^2 - 4c + [-4b + 4] > 0$

10. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \sin \pi x$ 在 $0 \leq x \leq 3$ 內之函數圖形。一水平直線 $L: y = k$ 與 Γ 相交，其中三交點 $P(x_1, k)$ 、 $Q(x_2, k)$ 、 $R(x_3, k)$ 滿足 $x_1 < x_2 < 1 < x_3$ 。試選出正確的選項。
- (1) $k > 0$ (2) L 與 Γ 恰有 3 個交點
 (3) $x_1 + x_2 < 1$ (4) 若 $2\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，則 $k = \frac{1}{2}$
 (5) L 與 Γ 所有交點的 x 坐標之和大於 5

【114 年學測數 A】

答：(1)(4)(5)

解：(1) 週期為 2，畫圖即知 $k > 0$

(2) 應有 4 交點 (3) $x_1 + x_2 = 1$

(4) $\overline{PQ} + \overline{QR} = 2$ ，又 $\overline{QR} = 2\overline{PQ} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{2}{3}$ ，故 $P\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $Q\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $R\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{2}\right)$

(5) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 5 = 6$

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，令 $\overline{AB}$ 中點為 D ，

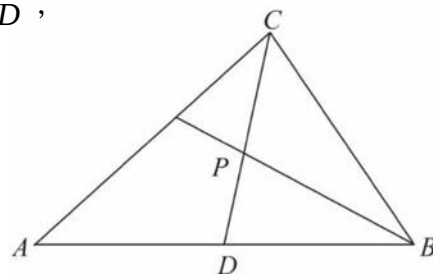
P 為 $\angle ABC$ 之角平分線與 $\overline{CD}$ 之交點，如圖所示。

試選出正確的選項。

(1) $\overline{CP} = \frac{3}{7}\overline{CD}$ (2) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

(3) $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ (4) $\triangle ACP$ 面積為 $\frac{15}{14}\sqrt{7}$

(5) (內積) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{120}{7}$



【114 年學測數 A】

答：(3)(4)(5)

解：(1) $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BQ} = t\left[\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right] = \left(\frac{2t}{5}\right)[2\overrightarrow{BD}] + \left(\frac{3t}{5}\right)\overrightarrow{BC}$

則 $\frac{4t}{5} + \frac{3t}{5} = 1 \Rightarrow t = \frac{5}{7}$ ， $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{PD}} = \frac{4}{3}$

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

(3) $\cos \angle BAC = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{3}{4}$

(4) $\triangle ACP = \frac{4}{7}\triangle ABD = \frac{2}{7}\triangle ABC = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{2}} = \frac{15\sqrt{7}}{14}$

(5) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}(6^2 + 5^2 - 4^2) + \frac{3}{7} \times 5^2 = \frac{120}{7}$

12. 某種合金由甲和乙兩種金屬組成，某生想知道其中金屬比例與合金的波長關係。他做實驗測量「甲占比為 $x\%$ 的合金所對應的波長 y （單位：奈米）」，並將得到的 20 筆數據 (x_k, y_k) ， $k=1, \dots, 20$ ，在 xy 平面上標出對應的點，其迴歸直線（最適直線）為 $y = 21.3x - 40$ 。

為符合投稿規範，須將報告描述為「乙占比為 $u\%$ 的合金所對應的波長 v （單位：微米）」，他將數據 (x_k, y_k) 轉換為 (u_k, v_k) ， $k=1, \dots, 20$ ，得到在 uv 平面的迴歸直線為

$v = au + b$ 。已知 1 奈米 = 10^{-9} 公尺，1 微米 = 10^{-6} 公尺。試選出正確的選項。

(1) $u_k = 100 - x_k$ ， $k=1, \dots, 20$

(2) $v_k = 1000 y_k$ ， $k=1, \dots, 20$

(3) $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{20}$ 的標準差等於 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$ 的標準差

(4) $b = 2.09$

(5) 某生發現有另一筆數據 (u_{21}, v_{21}) ，且滿足 $v_{21} = au_{21} + b$ ；若將這 21 筆數據

(u_k, v_k) ， $k=1, \dots, 21$ ，在 uv 平面上標出對應的點，則其迴歸直線仍為 $v = au + b$

【114 年學測數 A】

答：(1)(3)(4)(5)

解：(2) $v_k = \frac{1}{1000} y_k$

(1)(3)(4)(5) $u_k = 100 - x_k \Rightarrow [1000v] = 21.3[100 - u] - 40$

$\Rightarrow v = -21.3u + 2.09$ 且 $\sigma_u = \sigma_x$

三、選填題（占 25 分）

13. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，則 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為_____。

【114 年學測數 A】

答：(-6, 3)

解： $f(x) = (x+6)q(x) + 3$ 且 $q(x) = a(x+6)^2 + 8$ ， $a < 0$

$\Rightarrow f(x) = (x+6)[a(x+6)^2 + 8] + 3 = a(x+6)^3 + 8(x+6) + 3$

$\Rightarrow$ 對稱中心 $(-6, 3)$

14. 坐標空間中，已知點 A 的坐標為 (a, b, c) ，其中 a, b, c 皆為小於 0 的實數，且知點 A 與三平面 $E_1: 4y+3z=2$ 、 $E_2: 3y+4z=-5$ 、 $E_3: x+2y+2z=-2$ 的距離都是 6，則 $a+b+c =$ _____。

【114 年學測數 A】

答：-11

解： $\frac{|4b+3c-2|}{5} = \frac{|3b+4c+5|}{5} = \frac{|a+2b+2c+2|}{3} = 6$ ， $a, b, c < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -4b-3c+2=30 \\ -3b-4c-5=30 \\ -a-2b-2c-2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+3c=-28 \\ 3b+4c=-35 \\ a+2b+2c=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=-8 \end{cases}$

15. 假日市集有個攤位推出「試試手氣，定價 480 元的可愛玩偶最低只要 240 元」。規則為：顧客投擲一枚均勻硬幣至多 5 次，前 3 次連續擲得 3 個正面者則只能以 240 元購得一個玩

偶，擲到第 4 次才累積得 3 個正面者則只能以 320 元購得一個，擲到第 5 次才累積得 3 個正面者則只能以 400 元購得一個；5 次投完仍未累積 3 個正面者則只能以 480 元購得一個。參與此遊戲的顧客購得一個玩偶所花金額的期望值為_____元。【114 年學測數 A】

答：405

$$\begin{aligned}\text{解： } E(X) &= 240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 320 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{3!}{2!} + 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{4!}{2!2!} + 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= 30 + 60 + 75 + 240 = 405\end{aligned}$$

16. 坐標平面上，設 L_1 、 L_2 為通過點 $(3, 1)$ 且斜率分別為 m 、 $-m$ 的兩條直線，其中 m 為一實數。另設 Γ 為圓心在原點的一個圓。已知 Γ 與 L_1 交於相異兩點 A 、 B ，且知圓心到 L_1 的距離為 1，又 Γ 與 L_2 相切，則弦 $\overline{AB}$ 的長度為_____。（化為最簡分數）

【114 年學測數 A】

答： $\frac{24}{5}$

$$\text{解： } d((0, 0), (y-1) = m(x-3)) = \frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$d\left((0, 0), (y-1) = -\frac{3}{4}(x-3)\right) = \text{半徑 } r = \frac{13}{5}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1^2} = \frac{24}{5}$$

17. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ ， $\cos \angle ABC = -\frac{1}{8}$ 。在 $\triangle ABC$ 的外接圓上有一點 D 滿足

$\overline{BD} = 4$ ，且 $\overline{AD} \leq \overline{CD}$ ，則 $\overline{CD} =$ _____。（化為最簡根式）

【114 年學測數 A】

答： $3 + \sqrt{2}$

$$\text{解： } \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{\frac{9}{2}}{\sin \angle ABC} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = 2R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sin \angle BCD} = 2R \Rightarrow \sin \angle BCD = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \cos \angle BCD = \frac{\overline{CD}^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times \overline{CD} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = 3 + \sqrt{2}$$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

已知 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ 皆為坐標平面上以原點 O 為中心，逆時針旋轉

一銳角的旋轉矩陣，且滿足 $A^2 = B^3 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$ ，其中 c, d 為實數。設點 $P(1, 1)$ 經 A^3 變換後為點 Q ，且點 Q 經 B^4 變換後為點 R 。根據上述，試回答下列問題。

18. 試問 c 之值為何？（單選題）

- (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$

【114 年學測數 A】

答：(2)

解： $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ ， $0 < \theta, \phi < \frac{\pi}{2}$
 $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ， $c = -1$ ， $d = 0$
 $B^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\phi & -\sin 3\phi \\ \sin 3\phi & \cos 3\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

19. 試求點 Q 的坐標，以及 $\overrightarrow{OR}$ 與向量 $(1, 0)$ 的夾角。

【114 年學測數 A】

答： $Q(-\sqrt{2}, 0)$ ， 60°

解： $\begin{bmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$ ，表 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1, 0)$ 夾 60°

20. 設 L 為過點 P 且與直線 OQ 平行的直線，點 S 為 L 和直線 OR 的交點，試求 $\angle OSP$ ，並求點 S 的坐標。

【114 年學測數 A】

答： $\angle OSP = 60^\circ$ ， $S\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$

解： $L: y = 1$ ， $\overrightarrow{OR}: y = -\sqrt{3}x \Rightarrow$ 交點 $S\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ ，而 $\angle OSP = 60^\circ$ （畫圖即知）