

114 年 大學入試 分科測驗 數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題 (佔 72 分)

一、單選題 (佔 30 分)

1. 試選出 $1.\overline{5} \times 5$ 的值。

- (1) $7.\overline{5}$ (2) $7.\overline{6}$ (3) $7.\overline{7}$ (4) $7.\overline{8}$ (5) $7.\overline{9}$

【114 分科測驗數乙】

答：(3) (第一冊第一章有理數)

解：所求： $\frac{14}{9} \times 5 = \frac{70}{9} = 7\frac{7}{9} = 7.\overline{7}$

2. 坐標平面上，試問下列哪一個方程式的圖形是通過點 $(1,1)$ 的圓？

- (1) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ (3) $3(x-1)^2 + y^2 = 1$
(4) $x^2 + y^2 = 1$ (5) $x^2 + 3y = 4$

【114 分科測驗數乙】

答：(1) (第六冊第一章圓錐曲線)

解：僅(1)(3)(5)代入合，但(3)為橢圓，(5)為拋物線

3. 已知有兩個公正的六面骰子 A 、 B ：

A 上的點數分別為 1、2、5、6、7、9，

B 上的點數分別為 1、3、4、5、6、9，

記錄 A 、 B 點數大小關係如下表所示。例如：

A 與 B 的點數分別為 5 與 3，記錄為「 A 大」； A 與 B 點數均為 5，記錄為「和局」。

		A						
		點數	1	2	5	6	7	9
B	1	和局	A 大	A 大	A 大	A 大	A 大	A 大
	3	B 大	B 大	A 大	A 大	A 大	A 大	A 大
	4	B 大	B 大	A 大	A 大	A 大	A 大	A 大
	5	B 大	B 大	和局	A 大	A 大	A 大	A 大
	6	B 大	B 大	B 大	和局	A 大	A 大	A 大
	9	B 大	B 大	B 大	B 大	B 大	B 大	和局

今某人同時擲 A 、 B 兩骰子，則在 A 點數大於 B 點數的條件下， B 點數是 6 的機率為何？

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) $\frac{1}{18}$ (5) $\frac{1}{32}$

【114 分科測驗數乙】

答：(2) (第四冊第三章條件機率)

解：所求：
$$= \frac{n(A > B \text{ 且 } B = 6)}{n(A > B)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

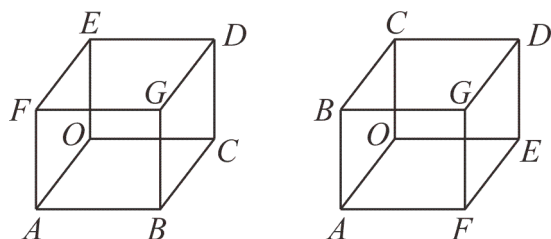
4. 空間中有一個邊長為 1 的正立方體。點 O 為其中一個頂點，其餘 7 個頂點為 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 。已知 $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = 1$ 且 $\overline{OG} > 1$ ，試選出距離點 O 最遠的頂點。

- (1) C (2) D (3) E (4) F (5) G

【114 分科測驗數乙】

答：(5) (第四冊第一章空間概念)

解：

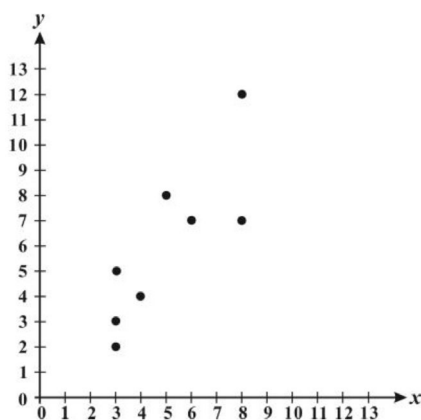


5. 某公司統計上週 8 家分店的來店人數 x (單位：百人) 及營業額 y (單位：萬元)，得到 8 筆數據 (x, y) ，記錄如下：

$(3, 3)$ 、 $(3, 5)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(4, 4)$ 、 $(5, 8)$ 、 $(6, 7)$ 、 $(8, 12)$ 、 $(8, 7)$ 。

在坐標平面上標出這 8 個點 (如圖所示)，

推得這 8 筆數據 y 對 x 的最適直線 (迴歸直線) 方程式為 $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$ 。



公司想從另一個角度分析，將這 8 筆數據的來店人數、營業額各自從小到大排序，得到新的 8 筆數據 (x, y) 如下：

$(3, 2)$ 、 $(3, 3)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(4, 5)$ 、 $(5, 7)$ 、 $(6, 7)$ 、 $(8, 8)$ 、 $(8, 12)$ 。

設新的 8 筆數據 y 對 x 的最適直線 (迴歸直線) 方程式為 $y = mx + b$ ，其中 m 、 b 為實數。根據上述，試選出正確的選項。

(1) $m = \frac{5}{4}$ 且 $b = -\frac{1}{4}$ (2) $m > \frac{5}{4}$ 且 $b > -\frac{1}{4}$ (3) $m > \frac{5}{4}$ 且 $b < -\frac{1}{4}$

(4) $m < \frac{5}{4}$ 且 $b > -\frac{1}{4}$ (5) $m < \frac{5}{4}$ 且 $b < -\frac{1}{4}$

【114 分科測驗數乙】

答：(3) (第二冊第二章迴歸直線)

解：新 $\mu_x = 5$ ，新 $\mu_y = 6$

新 $(x_i - \mu_x)$	新 $(y_i - \mu_y)$	新 $(x_i - \mu_x)^2$	新 $(y_i - \mu_y)^2$	新 $(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$
-2	-4	4	16	8
-2	-3	4	9	6
-2	-2	4	4	4
-1	-1	1	1	1
0	1	0	1	0
1	1	1	1	1
3	2	9	4	6
3	6	9	36	18
		$\Sigma = 32$	$\Sigma = 72$	$\Sigma = 44$

$$\text{新斜率 } m = \frac{44}{32} = \frac{11}{8} > \frac{5}{4}$$

$$\text{新迴歸直線: } (y-6) = \frac{11}{8}(x-5) \Rightarrow y = \frac{11}{8}x - \frac{7}{8}, \text{ 而 } \frac{-7}{8} < \frac{-1}{4}$$

解：新數據為原數據重新排序，故「算術平均」與「標準差」均不變

$$\text{新 } \sum x_i y_i = 284 > \text{原 } \sum x_i y_i = 280, \text{ 故 } m > \frac{5}{4}, \text{ 又 } b = -m\mu_x + \mu_y < -\frac{1}{4}$$

6. 試選出 $\sum_{k=1}^5 \log_7 \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right)$ 的值。

- (1) $-\log 11$ (2) $\log 11$ (3) $\log \frac{11}{7}$ (4) $-\frac{\log 11}{\log 7}$ (5) $\frac{\log 11}{\log 7}$ 【114 分科測驗數乙】

答：(4) (第三冊第二章對數運算律)

$$\text{解：所求：} \log_7 \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9} \times \frac{9}{11} \right) = \log_7 \frac{1}{11} = -\frac{\log 11}{\log 7}$$

二、多選題 (佔 24 分)

7. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $A^2 = A$ (2) $A+B = B+A$ (3) $AB = BA$
(4) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (5) $(A+B)^2 = 2(A+B)$

【114 分科測驗數乙】

答：(1)(2)(5) (第四冊第四章矩陣)

$$\text{解：} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A, \text{ 故(1)對}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \text{ 故(2)對}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A, \text{ 故(3)(4)錯}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B + A + B = 2(A+B), \text{ 故(5)對}$$

8. 平面上有一個三角形 ABC ，其中 $\angle A = 91^\circ$ 、 $\angle C = 29^\circ$ 。令 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ 。試選出正確的選項。

- (1) $a^2 > b^2 + c^2$ (2) $\frac{c}{a} > \sin 29^\circ$ (3) $\frac{b}{a} > \cos 29^\circ$ (4) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} < \sqrt{3}$

(5) 三角形 ABC 的外接圓半徑小於 c

【114 分科測驗數乙】

答：(1)(2) (第二冊第四章三角比)

解：(1) $\angle A$ 為鈍角 $\Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$$(2) \text{正弦定律} \Rightarrow \frac{a}{\sin 91^\circ} = \frac{c}{\sin 29^\circ} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 91^\circ} > \frac{\sin 29^\circ}{1}$$

$$(3) \text{正弦定律} \Rightarrow \frac{a}{\sin 91^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 91^\circ} < \sin 61^\circ = \cos 29^\circ$$

析：觀察 $y = \sin x$ 圖形之切線斜率（亦即遞增遞減趨勢）

$$\text{得知 } \sin 61^\circ - \sin 60^\circ > \sin 90^\circ - \sin 91^\circ \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin 91^\circ} < \frac{\sin 61^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$(4) \text{餘弦定律} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = 2 \cos C = 2 \cos 29^\circ > 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$(5) \text{正弦定律} \Rightarrow \frac{c}{\sin 29^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \sin 29^\circ} > \frac{c}{2 \sin 30^\circ} = c$$

9. 有一個抽牌拿獎金活動，規則如下：

在一個不透明箱子中有 2 張標示金額「1000 元」的牌及 3 張標示金額「0 元」的牌。參加者從箱中隨機抽出一張牌，在不知道抽出牌標示的金額情況下，主持人再將一張標示金額「500 元」的牌放入箱中。此時參加者有以下兩種選擇：

(一) 保留原先抽出的牌，該牌標示的金額即為獲得的獎金。

(二) 放棄原先抽出的牌且不放回，再從箱中隨機抽出一張牌，該牌標示的金額即為獲得的獎金。

今某甲參加此活動，假設每張牌被抽中的機會均相等，試選出正確的選項。

(1) 若某甲選擇(一)，則獲得獎金 0 元的機率為 $\frac{3}{5}$

(2) 若某甲選擇(一)，則獲得獎金的期望值為 500 元

(3) 若某甲選擇(二)，則獲得獎金 1000 元的機率為 $\frac{2}{5}$

(4) 若某甲選擇(二)，則獲得獎金 0 元的機率為 $\frac{12}{25}$

(5) 若某甲選擇(二)，則獲得獎金的期望值為 420 元

【114 分科測驗數乙】

答：(1)(4)(5)（第四冊第三章獨立事件）

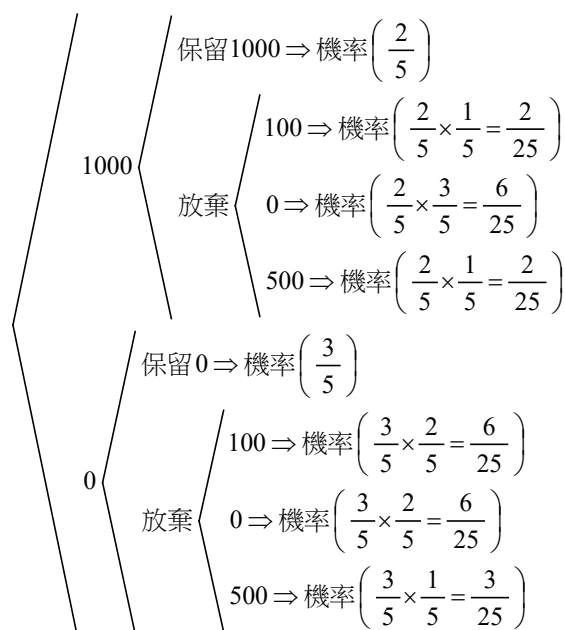
解：(1) 正確

$$(2) E(X) = 1000 \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{3}{5} = 400$$

$$(3) \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

$$(4) \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$$(5) E(Y) = 1000 \times \frac{8}{25} + 0 \times \frac{12}{25} + 500 \times \frac{5}{25} = 420$$



三、選填題 (佔 18 分)

10. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，已知複數 $\frac{1-7i}{-1+i} = a+bi$ ，其中 a 、 b 為實數。

則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【114 分科測驗數乙】

答： $a = -4$ ， $b = 3$ (第六冊第三章複數)

解： $a+bi = \frac{1-7i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-8+6i}{2} = -4+3i$

11. 某洗衣機的行程必須從一、二、三、四、五共 5 種不同衣料擇一，搭配甲、乙、丙、丁共 4 種不同模式擇一，另有 A 、 B 、 C 共 3 種附加功能，每種附加功能可以自由選擇是否開啟，但是「第一種衣料」不可以與附加功能「 A 」同時使用。例如「第二種衣料」搭配「甲模式」，且同時開啟「 A 」、「 B 」兩種附加功能為一個可以的行程；但「第一種衣料」搭配「甲模式」，且同時開啟「 A 」、「 B 」兩種附加功能為一個不可以的行程。根據上述，此洗衣機共有 個可以的行程。

【114 分科測驗數乙】

答： 144 (第二冊第三章排列組合)

解： $\underbrace{5 \times 4 \times \left(2^3\right)}_{\text{全}} - \underbrace{1 \times 4 \times \left(1 \times 2^2\right)}_{\text{(一) 搭配 (A)}} = 160 - 16 = 144$

12. 平面上有不共線的三點 A 、 B 、 C ，已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的內積為 16， $\overrightarrow{CB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的內積為 3，則 $\overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

【114 分科測驗數乙】

答： $\sqrt{13}$ (第三冊第三章向量內積)

解： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$
 $\Rightarrow 16 + (-3) = |\overrightarrow{AC}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$

第貳部分：混合題或非選擇題 (佔 28 分)

13-15 題為題組

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式。已知函數 $y = f(x)$ 在 $x = -3$ 處有極小值；在 $x = 1$ 處有極大值。根據上述，試回答下列問題。

13. 下列關於 $f''(-3)$ 和 $f''(1)$ 的敘述，試選出正確的選項。(單選題)

- (1) $f''(-3) = f''(1) = 0$ (2) $f''(-3) > 0$ 且 $f''(1) > 0$
(3) $f''(-3) > 0$ 且 $f''(1) < 0$ (4) $f''(-3) < 0$ 且 $f''(1) > 0$
(5) $f''(-3) < 0$ 且 $f''(1) < 0$

【114 分科測驗數乙】

答： (3) (第五冊第二章微分)

解： $f'(x) = a(x+3)(x-1) = a(x^2 + 2x - 3)$ ，且 $a < 0 \Rightarrow f''(x) = a(2x + 2)$ ，
則 (3) $f''(-3) = -4a > 0$ 且 $f''(1) = 4a < 0$

14. 已知通過 $y = f(x)$ 圖形反曲點的切線斜率為 4，試求 $f'(x)$ 。

【114 分科測驗數乙】

答： $f'(x) = -x^2 - 2x + 3$ (第五冊第二章微分)

解： $f(x)$ 為實係數三次多項式，且在 $x = -3$ 處有極小值；在 $x = 1$ 處有極大值

故反曲點 $(-1, f(-1)) \Rightarrow f'(-1) = -4a = 4 \Rightarrow a = -1$ ，故 $f'(x) = -x^2 - 2x + 3$

15. 承 14 題，試求 $\int_{-3}^1 f'(x) dx$ 的值。

【114 分科測驗數乙】

答： $\frac{32}{3}$ (第五冊第三章積分)

解： $\int_{-3}^1 f'(x) dx = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c \right]_{-3}^1 = \frac{32}{3}$

16-18 題為題組

某人想在農地種植甲、乙兩種水果，並設定甲水果的種植面積（甲面積）、乙水果的種植面積（乙面積）符合以下三個條件：

(一) 甲面積不超過 15 公畝。

(二) 甲面積與乙面積的和不超過 24 公畝。

(三) 甲面積不超過乙面積的 3 倍，且乙面積不超過甲面積的 2 倍。

設甲面積為 x 公畝、乙面積為 y 公畝。根據上述，試回答下列問題。

16. 試問下列哪一個選項的數對 (x, y) 會滿足上述的三個條件？（單選題）

(1) (7, 15) (2) (12, 13) (3) (14, 10) (4) (15, 4) (5) (16, 8)

【114 分科測驗數乙】

答： (3) (第一冊第三章線性規劃)

解： $\begin{cases} 0 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq x + y \leq 24 \\ x \leq 3y \\ y \leq 2x \end{cases}$ ，僅 (3) (14, 10) 合於所有範圍

17. 試將某人對甲面積、乙面積所設定的三個條件，以 x 、 y 的二元一次聯立不等式表示。

【114 分科測驗數乙】

答： $\begin{cases} 0 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq x + y \leq 24 \\ x \leq 3y \\ y \leq 2x \end{cases}$ (第一冊第三章線性規劃)

18. 已知某人的農地收成時，甲水果每公畝可獲利 6 萬元、乙水果每公畝可獲利 7 萬元。試求某人種植甲、乙兩種水果的最大獲利為多少萬元？在答題卷求解區寫出計算過程，並在答題卷作圖區畫出可行解區域及標出其所有頂點坐標，且以斜線標示該區域。

【114 分科測驗數乙】

答： 當甲 8 畝，乙 16 畝時，有最大收益 160 萬元 (第一冊第三章線性規劃)

解:

(x,y)	$(0,0)$	$(15,5)$	$(15,9)$	$(8,16)$
$6x+7y$	0	125	153	160

