114 年大學入學學力測驗數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

1. 設數線上有一點 P 滿足 P 到 1 的距離加上 P 到 4 的距離等於 4。試問這樣的 P 有幾個？
(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 3 個　(5) 無限多個　【114 年學測數 B】

答：(3)

解：$|x-1|+|x-4|=4 \Rightarrow x=4.5$ 或 0.5

2. 設 A 為 3×2 階矩陣，且 $A\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，試問 $a+b+c$ 之值為何？
(1) 0　(2) 2　(3) 4　(4) 5　(5) 8　【114 年學測數 B】

答：(4)

解：$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ -1 & 1\\ 8 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\8\end{bmatrix}$

解：$A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\1\\5\end{bmatrix}\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\8\end{bmatrix}$

3. 已知實數 a,b 滿足 $\frac{1}{2}<a<1$ 及 $1<b<2$。試問下列哪個選項的值最小？
(1) 0　(2) $\log a$　(3) $\log\left(a^2\right)$　(4) $\log b$　(5) $\frac{1}{\log b}$　【114 年學測數 B】

答：(3)

解：$\log\left(a^2\right)<\log a<0<\frac{1}{\log b}<\log b$

4. 某商店推出抽獎活動，提供香蕉、鳳梨、蘋果、橘子四種不同款式的水果公仔當獎品。每次抽獎可得 1 個公仔，且每種款式被抽中的機率皆相等。某甲決定抽獎四次，試問他恰抽到三種不同款式公仔的機率為何？
(1) $\frac{5}{16}$　(2) $\frac{3}{8}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{9}{16}$　(5) $\frac{5}{8}$　【114 年學測數 B】

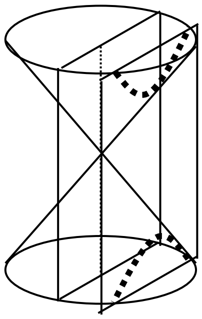
答：(4)

解：$\dfrac{C_1^4 C_2^3\times\frac{4!}{2!}}{4^4}=\frac{9}{16}$

5. 空間中有兩相交直線 L, M ，其夾角為 $24°$。將 M 繞著 L 轉一圈，可得一個直圓錐面。今有平面 E 與直線 L 平行，試問平面 E 與此直圓錐面的截痕是下列哪一個選項？
(1)雙曲線　(2)拋物線　(3)橢圓（長短軸不相等）　(4)圓　(5)兩相交直線
【114 年學測數 B】

答：(1)

解：



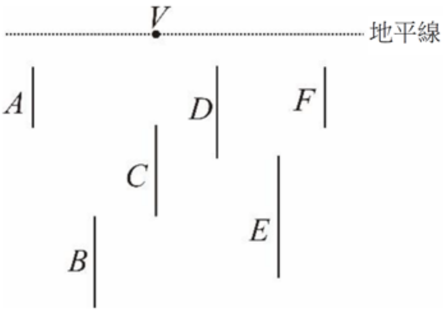
6. 設 a, b, c 為實數，且多項式 $f(x)=a(x-1)(x-3)+b(x-1)(x-4)+c(x-3)(x-4)$ 經化簡後，得 $f(x)=x^2$。有關 a, b, c 的大小關係，試選出正確的選項。
(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>c>a$　(4) $c>a>b$　(5) $c>b>a$
【114 年學測數 B】

答：(2)

解：$f(1)=6c=1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{6}$　$f(3)=-2b=9 \Rightarrow b=-\dfrac{9}{2}$　$f(4)=3a=16 \Rightarrow a=\dfrac{16}{3}$

7. 某人使用單點透視法，以地平線上一點為消失點，將地平面上的六根鉛直柱子 A, B, C, D, E, F 畫在坐標平面上，各柱柱頂與柱底的坐標如下表，並且讓點 $V(4,9)$ 代表消失點，如圖所示。
因圖形中 A、F 兩柱的柱底連線與柱頂連線均平行於地平線，故 A、F 兩柱的實際高度相等。根據上述，試選出實際高度最大的柱子。

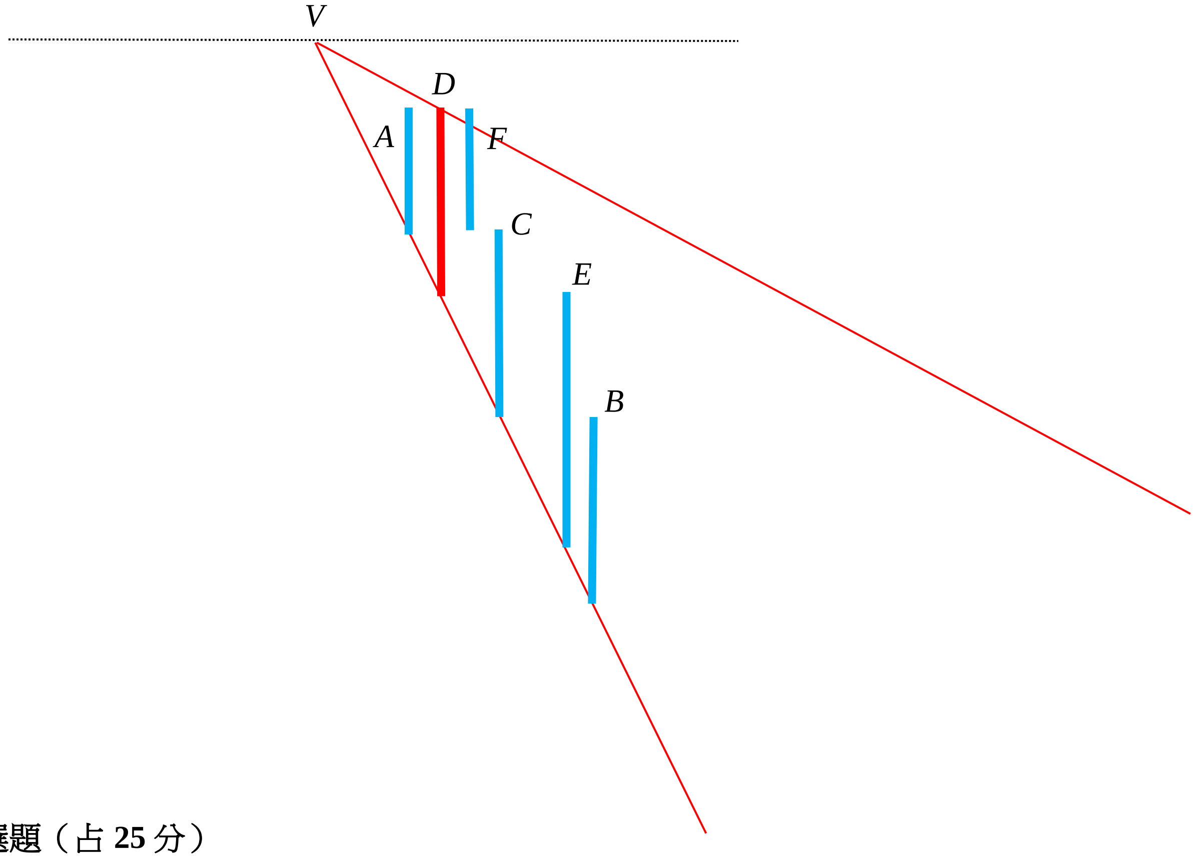
柱子	A	B	C	D	E	F
柱頂坐標	$(0,8)$	$(2,3)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(8,5)$	$(10,8)$
柱底坐標	$(0,6)$	$(2,0)$	$(4,3)$	$(6,5)$	$(8,1)$	$(10,6)$



(1) A　(2) B　(3) C　(4) D　(5) E
【114 年學測數 B】

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：



二、多選題（占 25 分）

8. 設 Γ 為坐標平面上函數 $y=x^3-x$ 的圖形。試選出正確的選項。
(1) Γ 的對稱中心為原點
(2) Γ 在 $x=0$ 附近會近似於直線 $y=x$
(3) Γ 經適當平移後可與函數 $y=x^3+x+3$ 的圖形重合
(4) Γ 與函數 $y=x^3+x$ 的圖形對稱於 x 軸
(5) Γ 與函數 $y=-x^3+x$ 的圖形對稱於 y 軸【114 年學測數 B】

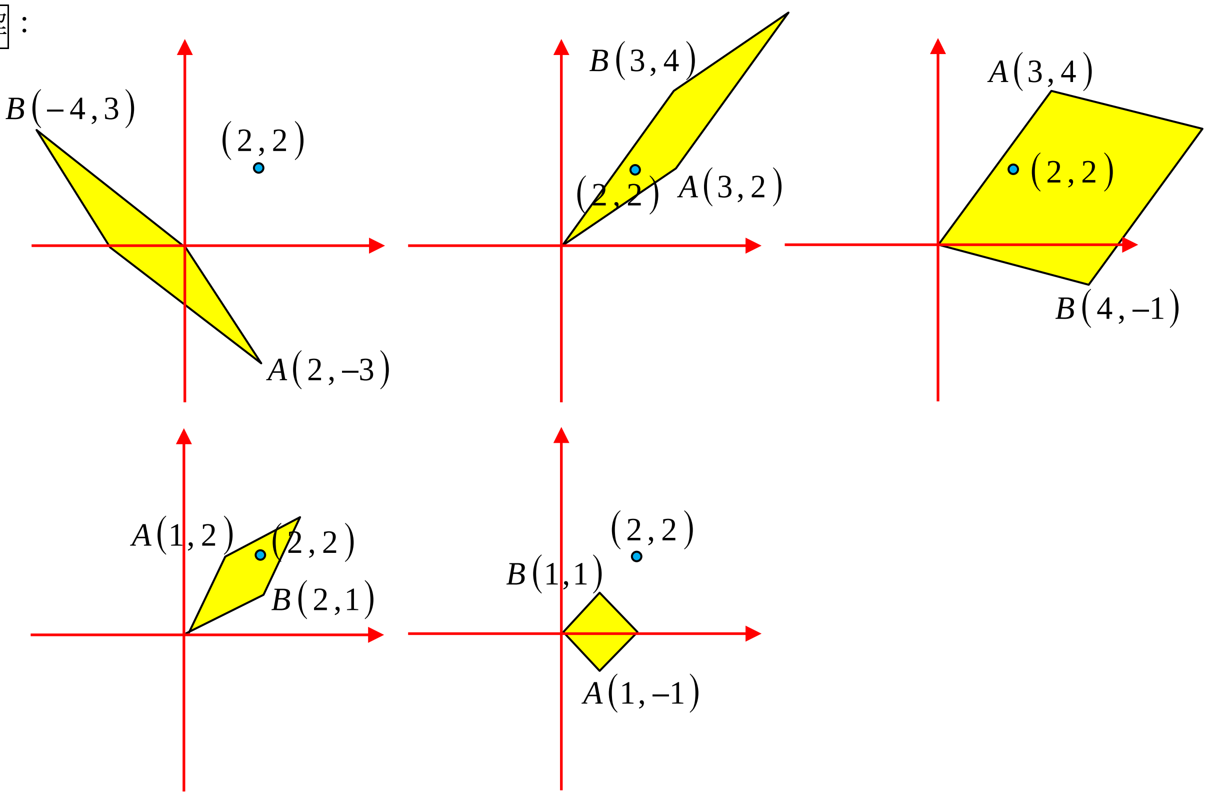
$\boxed{答}$：(1)(5)

$\boxed{解}$：(1) $y=(x-0)^3-(x-0)+0$，對稱中心 $(0,0)$
(2)應為 $y=-x$
(3)無法重合
(4)應無對稱關係
(5)正確

9. 坐標平面上設 O 為原點，且 P 點坐標為 $(2,2)$。已知向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中實數 α,β 滿足 $0\le\alpha\le1$，$0\le\beta\le1$。下列選項中，試選出可能的 A、B 點坐標。
(1) $A(2,-3)$、$B(-4,3)$ (2) $A(3,2)$、$B(3,4)$ (3) $A(3,4)$、$B(4,-1)$
(4) $A(1,2)$、$B(2,1)$ (5) $A(1,-1)$、$B(1,1)$【114 年學測數 B】

$\boxed{答}$：(2)(3)(4)

解：



10. 某羽球選手與甲、乙、丙、丁四位選手各比賽一場。賽後蒐集這四場比賽的數據，統計該選手的對手在比賽中殺球的總次數，以及每次殺球用時的平均及標準差，結果如下表所示。例如對手甲在該場殺球次數為 25 次、每次殺球用時平均 1.2 秒，每次殺球用時標準差 0.5 秒。

對手	該場殺球次數	每次殺球用時平均（秒）	每次殺球用時標準差（秒）
甲	25	1.2	0.5
乙	14	1.5	0.3
丙	20	1.7	0.2
丁	30	1.2	0.4

根據上述，對於甲、乙、丙、丁四位選手的表現，試選出正確的選項。
(1)丙在該場中每次殺球用時平均是四位中最多的
(2)丁在該場中花在殺球的總用時是四位中最多的
(3)甲在該場中每次殺球的用時都與丁相同
(4)甲在該場中每次殺球用時的全距，大於丁在該場中每次殺球用時的全距
(5)乙在該場中各次殺球的用時不可能都在 1.4 到 1.6 秒之間 【114 年學測數 B】

答：(1)(2)(5)

解：(1)丙 > 乙 > 甲 = 丁
(2)丁 = 36 > 丙 = 34 > 甲 = 30 > 乙 = 21
(3)甲、丁標準差不同
(4)無法得知
(5)標準差 0.3 > 0.1

11. 設地球是一個球體。地球表面上五個點 A、B、C、D、E 的經緯度如下表，例如 A 點位在經度 0 度，北緯 60 度。

位置	經度 0 度	經度 180 度
北緯 60 度	A	B
北緯 30 度	C	D
緯度 0 度	E	

大圓為通過球心的平面與球面相交所形成的圓，且球面上相異兩點在大圓上所形成較小的弧為最短路徑。根據上述，試選出正確的選項。

(1)「北極點到 A 的最短路徑長」等於「北極點到 B 的最短路徑長」

(2)「A 到 B 的最短路徑長」等於「C 到 D 的最短路徑長」

(3) A 到 E 的最短路徑必經過 C

(4) C 到 D 的最短路徑必經過北極點

(5)「E 到北極點的最短路徑長」與「C 到 D 的最短路徑長」的比為 2：3

【114 年學測數 B】

答：(1)(3)(4)

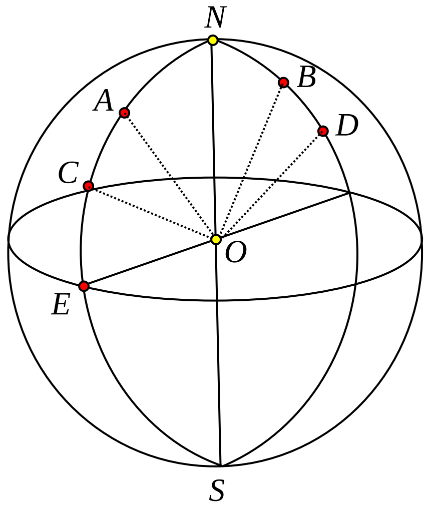
解：(1) $(北\to A)=(北\to B)$

(2) $(A\to B)<(C\to D)$

(3) $A\to C\to E$

(4) $C\to 北\to D$

(5)應為 $\frac{\pi}{2}:\frac{2\pi}{3}=3:4$



12. 已知某等差數列的首項是 1，末項是 81，且 9 也在此數列中。設此數列的項數為 n，其中 $n\le 100$。試選出正確的選項。

(1) n 為奇數

(2) 41 必在此等差數列

(3)滿足條件的等差數列，其公差都是整數

(4)滿足條件的等差數列共有 10 個

(5)若 n 為 7 的倍數，則 $n=21$

【114 年學測數 B】

答：(1)(2)

解：$\begin{cases} 81=1+(n-1)d \\ 9=1+(k-1)d \end{cases} \Rightarrow \frac{n-1}{k-1}=\frac{80/d}{8/d}=10 \Rightarrow n=10k-9$

(1) $n,k\in N$，故 n 必為奇數

(4) $3\le n\le 100 \Rightarrow k=2,3,4,\cdots,10 \Rightarrow n=11,21,31,\cdots,91$

(5) n 為 7 的倍數 $\Rightarrow n=21$ 或 91

(3) $d=\frac{8}{k-1}=8,4,\frac{8}{3},\cdots,\frac{8}{9}$ 不一定為整數

(2) $\because n$ 為奇數　　$\therefore 1,81$ 之等差中項必為 41

三、選填題（占 25 分）

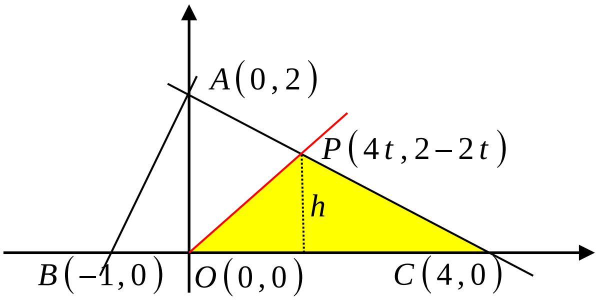
13.某景點旁邊有兩個停車場，假設某日任一停車場沒有空位的機率皆為 0.7，且這兩個停車場是否有空位互不影響。若一輛車子在當天來到這兩個停車場外面，則至少有一個停車場內有空位的機率為________。【114 年學測數 B】

答：0.51

解：$1-(0.7)^2=0.51$

14.坐標平面上，給定三點 $A(0,2)$、$B(-1,0)$、$C(4,0)$。若直線 $y=mx$ 將三角形 ABC 分成面積相等的兩部分，則 $m=$________。（化為最簡分數）【114 年學測數 B】

答：$\dfrac{5}{6}$



解：$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4\times h}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\times 2}{2}\Rightarrow h=\dfrac{5}{4}\\ \text{又}\ \dfrac{4-x}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\rangle\ m=\dfrac{h}{x}=\dfrac{5}{6}$

解：$P(4t,2-2t)\ \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4t & 2-2t\\ 4 & 0\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\times 2}{2}$

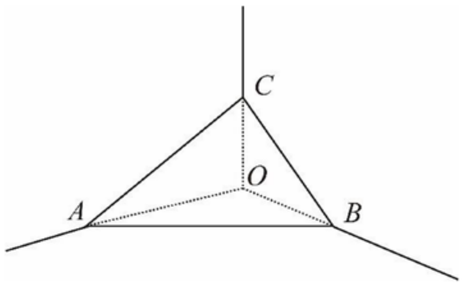
$\Rightarrow t=\dfrac{3}{8}$ 或 $\dfrac{13}{8}$（不合）$\Rightarrow P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4}\right)$，$m=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{6}$

15.某公司聘請 8 名新進員工，其中含 2 名翻譯、3 名工程師與 3 名助理。將此 8 人分派給研發、測試兩個部門，其中每個部門各分派 4 人，且各需含 1 名翻譯與至少 1 名工程師。依此共有________種分配方法。【114 年學測數 B】

答：36

解：$\underbrace{2!}_{\text{翻譯}}\times\left[C_1^3C_2^3\left(C_2^2C_1^1\right)\times 2!\right]=36$

16.教室的某牆角是由牆面和地面兩兩互相垂直所構成。設牆角為點 O，現有一個三角形擋板 ABC，其中頂點 A、B、C 位在牆面間或牆面與地面間的交界線上，並與牆角 O 的距離分別為 20、20、10 公分；$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 三邊與牆面或地面貼合，如圖所示。則 $\tan\angle CAB=$________。（化為最簡根式）



【114 年學測數 B】

答：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解：$A(20,0,0)$，$B(0,20,0)$，$C(0,0,10)$，$\overrightarrow{AB}=(-20,20,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-20,0,10)$

$$\Rightarrow \cos\angle CAB=\frac{400}{20\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{10}}\quad \Rightarrow \tan\angle CAB=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

17.某液晶面板由紅、綠、藍三種顏色的 LED 燈泡組成。已知各色燈泡亮燈的循環規律如下：
紅色：「亮 3 秒，再暗 1 秒，再亮 2 秒」
綠色：「亮 6 秒，再暗 2 秒」
藍色：「亮 k 秒，再暗 $(15-k)$ 秒」，其中 k 為正整數。
若在某時刻三種顏色的燈泡同時各自開始作上述循環，面板上都一直有燈亮著，並設各燈泡亮、暗切換的時間極短可被忽略，則 k 的最小值為________。【114 年學測數 B】

答： 13

解：紅（6 秒一循環）、綠（8 秒一循環）⇒共同週期 24 秒
紅暗：4、10、16、22、…（$6t+4$）
綠暗：7、8、15、16、23、24、…（$8s+7$ 、 $8s+8$）
故紅綠同暗：16、40、64、88、112、…（$24n+16$ ，表這些時刻，藍必為亮）
又藍（15 秒一循環）$\xrightarrow{\text{紅綠同暗}\div 15}$餘 1、10、4、13、7、…
所以藍規律為（15 亮 0 暗）或（14 亮 1 暗）或（13 亮 2 暗）可成立
其餘則失敗（例如 12 亮 3 暗，會使 13 同暗），亦即 k 最小值為 13

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

地球受到太陽照射過來的紫外線強度以 UVI 數值表示，一單位 UVI 的照射強度相當於每平方公尺 100 焦耳的能量。根據上述，試回答下列問題。

18.已知 UVI 數值與所在高度呈指數關係：高度每上升 300 公尺，其 UVI 數值增加上升前的 4%。在地平面上接收到太陽發出每平方公尺 400 焦耳的紫外線，則到了離地平面 4500 公尺高的山上，接收到紫外線的 UVI 數值為下列哪一個選項？（單選題）
(1) $4(1+0.04\times 15)$　(2) $4\left(1+0.04^{15}\right)$　(3) $4(1+0.04)^{15}$
(4) $4\times 100(1+0.04)^{15}$　(5) $4\times 100\left(1+0.04^{45}\right)$　【114 年學測數 B】

答：(3)

解： $4\times(1+4\%)^{\frac{4500}{300}}=4\times(1.04)^{15}$

19.已知某日某地的日照時數（日出到日落）恰為 12 小時，且該地當天日出後 x 小時（$0\le x\le 12$）的 UVI 數值，可用函數 $f(x)=a\sin(bx)$ 來表示，其中 $a,b>0$ 。
假設日照時 UVI 數值為正，非日照時 UVI 數值為 0（即 $f(0)=f(12)=0$），
且當天日出後 2 小時的 UVI 數值為 4。試求 a、b 之值。【114 年學測數 B】

答： $a=8$ ，$b=\frac{\pi}{12}$

解： 半週期 $2\pi\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{2}=12\quad\Rightarrow b=\frac{\pi}{12}$

又 $f(2)=a\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=4 \Rightarrow a=8$

20. 承 19 題，今某人要在該日 UVI 數值介於 $4\sqrt{2}$ 和 $4\sqrt{3}$ 之間（含）時做日光浴。
將他可以做日光浴的時間設為日出後 t 小時，試求 t 的最大可能範圍。 【114 年學測數 B】

答：$3\le t\le 4$，$8\le t\le 9$

解：$4\sqrt{2}\le 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\le 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{12}t\le\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{12}t\le\frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3\le t\le 4$ 或 $8\le t\le 9$