

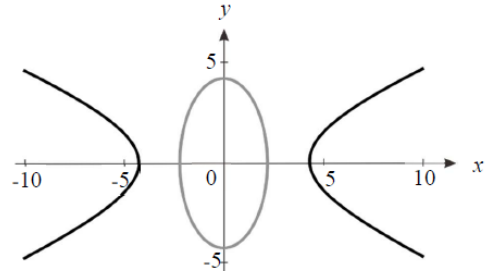
大學入學 115 年分科測驗數學甲

第壹部分：選擇(填)題(佔 76 分)

一、單選題(佔 18 分)

1. 已知圖中「粗灰線」橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，試選出最有可能為圖中「粗黑線」圖形方程式的選項。

(1) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
(4) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (5) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$



2. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為首項為 1、公比為 r 的無窮等比數列(其中 r 為非零實數)，且知兩無窮等比級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 與 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} + \dots$ 皆收斂且其乘積為 1。試選出正確的 r 值。(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (5) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 對任意實數 x ，試選出函數 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的最大值。
(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $1 + \sqrt{2}$ (5) $1 + \sqrt{3}$

二、多選題(佔 40 分)

4. 箱中有編號分別為 1, 2, 3 的球各 n_1, n_2, n_3 顆(其中 n_1, n_2, n_3 皆為正整數)。隨機抽取一球(每球被抽中的機率相等)，所抽出球的編號為 1, 2, 3 的機率分別記為 p_1, p_2, p_3 。試選出正確的選項。(1)在已知抽出一球且此球不是 1 號球的條件下，則該球為 2 號球的機率為 $\frac{p_2}{1-p_1}$ (2)抽出球編號的期望值等於 $2 + p_3 - p_1$ (3)若 n_1, n_2, n_3 為等差數列，

則 p_1, p_2, p_3 亦為等差數列 (4)若 n_1, n_2, n_3 為等比數列，則 $p_2 \geq \frac{1}{3}$

(5)若 $p_k < \frac{1}{2}$ 對 $k=1, 2, 3$ 都成立， n_1, n_2, n_3 可以構成一個三角形的三個邊長

5. 設 a 為實數，關於複數 $z = \frac{a-2i}{1+2i}$ 的性質，試選出正確的選項(其中 $i = \sqrt{-1}$ ， $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數)。(1) z 的實部為 $\frac{a-4}{5}$ (2)若 $\bar{z} = z$ ，則 $a = 1$ (3) $|z|^2 \geq \frac{4}{5}$ (4)若 $a = 0$ ，則 z 的主幅角大於 π (5)無論 a 值為何， z 都不會落在複數平面上的第一象限

6. 對於實係數多項式 $f(x)$ ，將閉區間 $[a, b]$ 分割成三等分段，取每個分段左端點上的 $f(x)$ 函數值所得到的黎曼和記為 $M_a^b(f)$ ，

即 $M_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) \right]$ ；取每個分段右端點上的 $f(x)$ 函

數值所得到的黎曼和記為 $N_a^b(f)$ ，即 $N_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right]$

若已知 $f(x)$ 及其一階與二階導函數在三段開區間的正、負，如下表：

區間	$(2,3)$	$(4,5)$	$(6,7)$
$f(x)$	正	負	負
$f'(x)$	負	正	負
$f''(x)$	負	負	正

例如：在開區間 $(2,3)$ 上，滿足 $f(x) > 0$ ， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) < 0$ 。試選出正確的選項。

(1) 在開區間 $(4,5)$ 上，函數 $y = f(x)$ 遞增且圖形凹口向上 (2) 在閉區間 $[5,6]$ 上，函數

$y = f(x)$ 的圖形有反曲點 (3) $\int_2^3 f(x) dx < M_2^3(f)$ (4) $\int_4^5 f(x) dx > N_4^5(f)$

(5) $\int_6^7 f(x) dx > \frac{1}{2}(M_6^7(f) + N_6^7(f))$

7. 考慮函數 $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，試選出正確的選項。(1) 當 $x < 1$ 時， $f(x)$ 都有意義

(2) 當 $f(x)$ 與 $f(-x)$ 都有意義時， $f(-x) = -f(x)$ 成立 (3) 若 $f(x) > 0$ ，則 $x > 0$

(4) 存在實數 a ，滿足 $f(a) = -100$ (5) 坐標平面上， $y = f(x)$ 的圖形與 $y = 10^{\frac{1+x}{1-x}}$ 的圖形對直線 $y = x$ 對稱

8. 坐標平面上兩向量 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 滿足 $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$ 與 $\vec{u} - \vec{v} = (2, 2)$ 。試選出正確的選項。

(1) $|\vec{v} + (1, 1)| = 1$ (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ (3) $|\vec{v}| \leq 2$ (4) $\vec{u}$ 不可能與 $\vec{v}$ 平行

(5) 若 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 的夾角為 θ ，則 $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \leq 2\sqrt{2}$

三、選填題(佔 18 分)

9. 某甲到菜市場買蓮霧、草莓與葡萄共三種水果，每斤的價格依序為 110、190 與 160 元。已知某甲共買了 11 斤半的水果，共花費 1945 元，且草莓比葡萄多買了 2 斤。設蓮霧、草莓與葡萄依序分別買了 x 、 y 與 z 斤，將以上訊息寫成三元一次聯立方程式，再利用高斯

消去法化簡得到增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{23}{2} \\ 0 & 8 & a & 68 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right]$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 坐標平面上，一圓 C 的圓心在 x 軸上，且圓 C 與兩直線 $L_1: y = \frac{4}{3}x$ 、 $L_2: y = -\frac{3}{4}x$

皆不相交。設圓 C 上的點到 L_1 之最短距離為 d_1 ，圓 C 上的點到 L_2 之最短距離為 d_2 。

若 d_1 是 d_2 的三倍，則過原點 $(0, 0)$ 且與圓 C 相切的直線，其斜率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(化為最簡根式)

11. 某甲參加一遊戲，其規則如下：在第一階段連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 X 為出現點數大於 4 點的次數，若 $X \geq 3$ 才可進入第二階段，否則就淘汰。第二階段仍然連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 Y 為出現偶數點數的次數，若 $Y = X - 1$ 才可獲獎，否則就淘汰。則在某甲獲獎的條件下， $X = 3$ 的機率為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(佔 24 分)

12-14 題為題組

設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 為實係數多項式，已知 $q(x)$ 為首項係數為 1 的二次式，且滿足 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ 。根據上述，試回答下列問題。

12. 試證明 $q(0) = q(1)$ 。(非選擇題，2 分)

13. 試求 $p(x)$ 。(非選擇題，4 分)

14. 試求多項式函數 $\int_1^x (p(t) - q(t)) dt$ 在閉區間 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最大值與最小值。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

考慮坐標空間中兩平面 $E_1: x + y + 2z = 2$ 、 $E_2: 2x - y + z = 1$ ，並設其交線為 L 。根據上述，試回答下列問題。

15. 點 $(1, 0, 0)$ 到 E_1 的距離為_____。(化為最簡根式)(選填題，2 分)

16. 設另一平面 E_3 與 L 平行且包含直線 $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ ， t 為實數，試求平面 E_3 的方程式。

(非選擇題，4 分)

17. 承 16，設另一平面 E 與三平面 E_1, E_2, E_3 皆垂直，且設 E 分別與 E_1 、 E_2 、 E_3 的三條交線在 E 上所圍出的三角形為 Γ 。試證明 Γ 為正三角形並求 Γ 的邊長。(非選擇題，6 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

2026年分科測驗考試數學甲 參考答案

選擇題：1.(4) 2.(4) 3.(3) 4.(1)(2)(3)(5) 5.(1)(3)(4)(5) 6.(2)(3) 7.(2)(3)(4) 8.(1)(2)(5)

選填題：9. $a=5, b=4$ 10. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 11. $\frac{80}{101}$

混合題或非選擇題：12. 略 13. $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 14. 最大值 $\frac{22}{3}$ ，最小值 0

15. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 16. $E_3: x - 2y - z = 5$ 17. 證明如下；邊長為 $2\sqrt{2}$

17. 證明

平面 E 與 E_1, E_2, E_3 皆垂直，承上得 E 之法向量為 $(1, 1, -1)$

且 E_1, E_2, E_3 兩兩交線在平面 E 上之夾角，恰為 E_1, E_2, E_3 兩兩法向量之夾角

$$\cos \theta_{12} = \frac{|(1, 1, 2) \cdot (2, -1, 1)|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta_{23} = \frac{|(2, -1, 1) \cdot (1, -2, -1)|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{23} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta_{31} = \frac{|(1, -2, -1) \cdot (1, 1, 2)|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{31} = \frac{\pi}{3}$$

得證： Γ 為正三角形