

大學入學 115 年(114 學年度)

分科測驗 數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題 (佔 76 分)

一、單選題 (佔 18 分)

1. 已知圖中「粗灰線」橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，試選出最有可能為圖中「粗黑線」圖形方程式的選項。

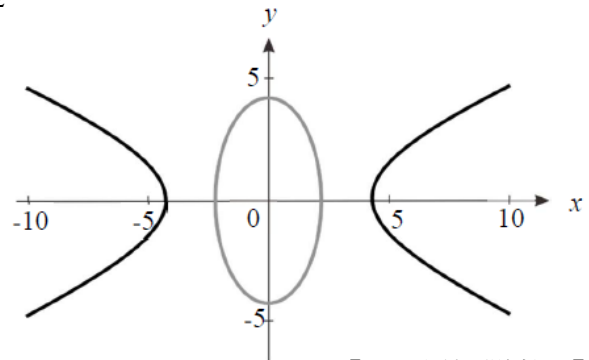
(1) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

(4) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

(5) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$



【115 分科測驗數甲】

答：(4) (第六冊圓錐曲線) 易

解：橢圓為直立型知： $b \approx 4 > a > 0$

雙曲線左右開口 $\Rightarrow \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

2. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為首項為 1、公比為 r 的無窮等比數列 (其中 r 為非零實數)，且知兩無窮等比級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 與 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} + \dots$ 皆收斂且其乘積為 1。試選出正確的 r 值。

(1) $-\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(4) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(5) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【115 分科測驗數甲】

答：(4) (第五冊極限) 易

解： $\frac{1}{1-r} \times \frac{1}{1-r^2} = 1 \Rightarrow r^3 - r^2 - r = 0 \xrightarrow{r \neq 0} r^2 - r - 1 = 0 \xrightarrow{-1 < r < 1} r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. 對任意實數 x ，試選出函數 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的最大值。

(1) 1

(2) $\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{3}$

(4) $1 + \sqrt{2}$

(5) $1 + \sqrt{3}$

【115 分科測驗數甲】

答：(3) (第三冊三角函數) 易

解： $f(x) = \sin x \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x - \sqrt{3} \cos x = \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \leq \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

二、多選題（佔 40 分）

4. 箱中有編號分別為 1, 2, 3 的球各 n_1, n_2, n_3 顆（其中 n_1, n_2, n_3 皆為正整數）。隨機抽取一球（每球被抽中的機率相等），所抽出球的編號為 1, 2, 3 的機率分別記為 p_1, p_2, p_3 。試選出正確的選項。

- (1) 在已知抽出一球且此球不是 1 號球的條件下，則該球為 2 號球的機率為 $\frac{p_2}{1-p_1}$
- (2) 抽出球編號的期望值等於 $2 + p_3 - p_1$
- (3) 若 n_1, n_2, n_3 為等差數列，則 p_1, p_2, p_3 亦為等差數列
- (4) 若 n_1, n_2, n_3 為等比數列，則 $p_2 \geq \frac{1}{3}$
- (5) 若 $p_k < \frac{1}{2}$ 對 $k=1, 2, 3$ 都成立， n_1, n_2, n_3 可以構成一個三角形的三個邊長

【115 分科測驗數甲】

答：(1)(2)(3)(5)（第二冊古典機率）中

解： $p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3}, p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3}, p_3 = \frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

(1) 正確

(2) $E(X) = \frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3}{n_1 + n_2 + n_3} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 \xrightarrow{p_2 = 1 - p_1 - p_3} 2 - p_1 + p_3$

(3) 正確

(4) $p_2 = \frac{n_1 r}{n_1 + n_1 r + n_1 r^2} = \frac{1}{\frac{1}{r} + 1 + r} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{r} \times r + 1}} = \frac{1}{3}$ （算幾不等式， $r > 0$ ）

(5) $p_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 + p_3 > \frac{1}{2} > p_1$ ，依此類推，正確

5. 設 a 為實數，關於複數 $z = \frac{a-2i}{1+2i}$ 的性質，試選出正確的選項（其中 $i = \sqrt{-1}$ ， $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數）。

- (1) z 的實部為 $\frac{a-4}{5}$ (2) 若 $\bar{z} = z$ ，則 $a = 1$
- (3) $|z|^2 \geq \frac{4}{5}$ (4) 若 $a = 0$ ，則 z 的主幅角大於 π
- (5) 無論 a 值為何， z 都不會落在複數平面上的第一象限

【115 分科測驗數甲】

答：(1)(3)(4)(5)（第六冊虛數複數）中

解： $z = \frac{a-2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(a-4) + (-2-2a)i}{5}, a \in R$

(1) 正確

(2) $z = \bar{z}$ ，表虛部 = 0 $\Rightarrow a = -1$

$$(3) |z|^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{a^2 + 4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

$$(4) a = 0, z = \frac{-4-2i}{5} \in \text{第三象限}, \operatorname{Arg}(z) > \pi$$

$$(5) z \in \text{第一象限} \Rightarrow a-4 > 0 \text{ 且 } -2-2a > 0 \Rightarrow a > 4 \text{ 且 } a < -1, \text{ 矛盾}$$

6. 對於實係數多項式 $f(x)$ ，將閉區間 $[a, b]$ 分割成三等分段，

取每個分段左端點上的 $f(x)$ 函數值所得到的黎曼和記為 $M_a^b(f)$ ，

$$\text{即 } M_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) \right];$$

取每個分段右端點上的 $f(x)$ 函數值所得到的黎曼和記為 $N_a^b(f)$ ，

$$\text{即 } N_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right]$$

若已知 $f(x)$ 及其一階與二階導函數在三段開區間的正、負，如下表：

區間	$(2, 3)$	$(4, 5)$	$(6, 7)$
$f(x)$	正	負	負
$f'(x)$	負	正	負
$f''(x)$	負	負	正

例如：在開區間 $(2, 3)$ 上，滿足 $f(x) > 0$ ， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) < 0$ 。試選出正確的選項。

(1) 在開區間 $(4, 5)$ 上，函數 $y = f(x)$ 遞增且圖形凹口向上

(2) 在閉區間 $[5, 6]$ 上，函數 $y = f(x)$ 的圖形有反曲點

$$(3) \int_2^3 f(x) dx < M_2^3(f)$$

$$(4) \int_4^5 f(x) dx > N_4^5(f)$$

$$(5) \int_6^7 f(x) dx > \frac{1}{2} \left(M_6^7(f) + N_6^7(f) \right)$$

【115 分科測驗數甲】

答：(2)(3) (第五冊積分) 中

解：(1) 應為遞增 ($f'(x) > 0$)，凹口向下 ($f''(x) < 0$)

(2) 正確

(3) 區間 $(2, 3)$ 內遞減且凹口向下， M_a^b 為上和

(4) 承(1)，區間 $(4, 5)$ 內， N_a^b 為上和

$$(5) \text{區間 } (6, 7) \text{ 內遞減且凹口向上，} \int_6^7 f(x) dx < \text{梯形面積} = \frac{1}{2} \left[M_6^7(f) + N_6^7(f) \right]$$

7. 考慮函數 $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，試選出正確的選項。

(1) 當 $x < 1$ 時， $f(x)$ 都有意義

(2) 當 $f(x)$ 與 $f(-x)$ 都有意義時， $f(-x) = -f(x)$ 成立

(3)若 $f(x) > 0$ ，則 $x > 0$

(4)存在實數 a ，滿足 $f(a) = -100$

(5)坐標平面上， $y = f(x)$ 的圖形與 $y = 10^{\frac{1+x}{1-x}}$ 的圖形對直線 $y = x$ 對稱

【115 分科測驗數甲】

答：(2)(3)(4) (第三冊指數對數) 中

解：(1)原式有意義：真數 $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$(2) f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

$$(3) \frac{1+x}{1-x} > 1 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x}{1-x} > 0 \Rightarrow 2x(1-x) > 0 \Rightarrow 2x(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$(4) f(a) = \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) = -100 \Rightarrow \frac{1+a}{1-a} = 10^{-100} = \frac{1}{10^{100}}$$

$$\Rightarrow \left(10^{100} + 1\right)a = 1 - 10^{100} \Rightarrow a = \frac{1 - 10^{100}}{10^{100} + 1} \text{ 成立}$$

$$(5) y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ 之反函數 } x = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = 10^x \Rightarrow y = \frac{10^x - 1}{10^x + 1}$$

8. 坐標平面上兩向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 滿足 $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$ 與 $\vec{u} - \vec{v} = (2, 2)$ 。試選出正確的選項。

(1) $|\vec{v} + (1, 1)| = 1$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

(3) $|\vec{v}| \leq 2$

(4) $\vec{u}$ 不可能與 $\vec{v}$ 平行

(5) 若 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 的夾角為 θ ，則 $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \leq 2\sqrt{2}$

【115 分科測驗數甲】

答：(1)(2)(5) (第三冊向量) 難

解：(1) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{v} + (2, 2) + \vec{v}| = |2\vec{v} + (2, 2)| = 2 \Rightarrow |\vec{v} + (1, 1)| = 1$

$$(2) |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 8$$

$$\Rightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

(3) 承(1)， $\vec{v}$ 終點 $\in (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ ， $|\vec{v}| \leq \sqrt{2} + 1$

(4) 承上， $\vec{v} = (-1 + \cos \phi, -1 + \sin \phi)$ ， $\vec{u} = (1 + \cos \phi, 1 + \sin \phi)$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \text{向量 } \vec{u}、\vec{v} \text{ 所張拓的平行四邊形面積} = 2(\sin \phi - \cos \phi) \text{ 可能為 } 0$$

(5) 承上， $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = |\vec{u} \times \vec{v}| \leq 2\sqrt{2}$

三、選填題（佔 18 分）

9. 某甲到菜市場買蓮霧、草莓與葡萄共三種水果，每斤的價格依序為 110、190 與 160 元。已知某甲共買了 11 斤半的水果，共花費 1945 元，且草莓比葡萄多買了 2 斤。設蓮霧、草莓與葡萄依序分別買了 x 、 y 與 z 斤，將以上訊息寫成三元一次聯立方程式，再利用高斯

消去法化簡得到增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{23}{2} \\ 0 & 8 & a & 68 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right]$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【115 分科測驗數甲】

答： $a = 5$ ， $b = 4$ （第四冊矩陣）易

解：
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 11.5 \\ 110x + 190y + 160z = 1945 \\ y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1.5 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \end{array} \right.$$

10. 坐標平面上，一圓 C 的圓心在 x 軸上，

且圓 C 與兩直線 $L_1: y = \frac{4}{3}x$ 、 $L_2: y = -\frac{3}{4}x$ 皆不相交。

設圓 C 上的點到 L_1 之最短距離為 d_1 ，圓 C 上的點到 L_2 之最短距離為 d_2 。

若 d_1 是 d_2 的三倍，則過原點 $(0, 0)$ 且與圓 C 相切的直線，

其斜率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡根式）

【115 分科測驗數甲】

答： $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ （第一冊直線與圓）中

解： 圓 $C: (x-h)^2 + y^2 = r^2$ 與兩直線 $L_1: y = \frac{4}{3}x$ 、 $L_2: y = -\frac{3}{4}x$

$$d_1 = 3d_2 \Rightarrow \frac{4h}{5} - r = 3\left(\frac{3h}{5} - r\right) \Rightarrow h = 2r$$

$$\Rightarrow C: (x-2r)^2 + y^2 = r^2, \text{ 又 } L_3: y = mx$$

$$\text{相切} \Rightarrow \frac{|2mr|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

11. 某甲參加一遊戲，其規則如下：

在第一階段連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 X 為出現點數大於 4 點的次數，若 $X \geq 3$ 才可進入第二階段，否則就淘汰。

第二階段仍然連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 Y 為出現偶數點數的次數，若 $Y = X - 1$ 才可獲獎，否則就淘汰。

則在某甲獲獎的條件下， $X = 3$ 的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡分數）【115 分科測驗數甲】

答： $\frac{80}{101}$ （第四冊條件機率）中

解： $P(X=3 \text{ 且 } Y=2, X=4 \text{ 且 } Y=3, X=5 \text{ 且 } Y=4)$

$$\begin{aligned}
&= C_3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 C_2^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_4^5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\quad + C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 C_4^5 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{505}{243 \times 32} \\
\text{條件機率} &= \frac{\frac{400}{243 \times 32}}{\frac{505}{243 \times 32}} = \frac{400}{505} = \frac{80}{101}
\end{aligned}$$

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

12-14 題為題組

設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 為實係數多項式，已知 $q(x)$ 為首項係數為 1 的二次式，且滿足 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ 。根據上述，試回答下列問題。（第五冊積分）

12. 試證明 $q(0) = q(1)$ 。 【115 分科測驗數甲】

證： $[q(0)]^2 = 0 \times \int_1^0 p(t) dt = 0 \Rightarrow q(0) = 0$ 中
 $[q(1)]^2 = 1 \times \int_1^1 p(t) dt = 0 \Rightarrow q(1) = 0$
 故 $q(0) = q(1) = 0$

13. 試求 $p(x)$ 。 【115 分科測驗數甲】

答： $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 中
解： 承上， $\deg q(x) = 2$ ，首項係數為 1 $\Rightarrow q(x) = x(x-1)$
 又 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt \Rightarrow x(x-1)^2 = \int_1^x p(t) dt$
 $\Rightarrow [x(x-1)^2]' = \left[\int_1^x p(t) dt \right]'$ ，故 $3x^2 - 4x + 1 = p(x)$

14. 試求多項式函數 $\int_1^x (p(t) - q(t)) dt$ 在閉區間 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最大值與最小值。 【115 分科測驗數甲】

答： $Max = \frac{22}{3}$ ， $Min = 0$ 中

解： $f(x) = \int_1^x [p(t) - q(t)] dt = \int_1^x [2t^2 - 3t + 1] dt$
 $f'(x) = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$
 $f(1) = 0$ (Min)
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$ 、 $f(3) = \frac{22}{3}$ (Max)

x	$\frac{1}{2}$	1	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	↘	↗

15-17 題為題組

考慮坐標空間中兩平面 $E_1: x+y+2z=2$ 、 $E_2: 2x-y+z=1$ ，並設其交線為 L 。根據上述，試回答下列問題。（第四冊空間中的線與面）

15. 點 $(1,0,0)$ 到 E_1 的距離為_____。（化為最簡根式）

【115 分科測驗數甲】

答： $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 易

解： $d((1,0,0), x+y+2z=2) = \frac{|1+0+0-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

16. 設另一平面 E_3 與 L 平行且包含直線 $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=2+3t \end{cases}$ ， t 為實數，試求平面 E_3 的方程式。

【115 分科測驗數甲】

答： $E_3: x-2y-z=5$ 中

解： $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = (1,1,2) \times (2,-1,1) = (3,3,-3) // (1,1,-1)$
 又 $(1,1,-1) \times (1,-1,3) = (2,-4,-2) // (1,-2,-1)$
 $\Rightarrow E_3: x-2y-z=k$ ，過 $(3,-2,2) \Rightarrow k=5$

17. 承 16，設另一平面 E 與三平面 E_1, E_2, E_3 皆垂直，

且設 E 分別與 E_1, E_2, E_3 的三條交線在 E 上所圍出的三角形為 Γ 。

試證明 Γ 為正三角形並求 Γ 的邊長。

【115 分科測驗數甲】

答： $2\sqrt{2}$ 難

證：平面 E 與 E_1, E_2, E_3 皆垂直，承上得 E 之法向量為 $(1,1,-1)$

且 E_1, E_2, E_3 兩兩交線在平面 E 上之夾角，恰為 E_1, E_2, E_3 兩兩法向量之夾角

$$\cos \theta_{12} = \left| \frac{(1,1,2) \cdot (2,-1,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta_{23} = \left| \frac{(2,-1,1) \cdot (1,-2,-1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{23} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta_{31} = \left| \frac{(1,-2,-1) \cdot (1,1,2)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{31} = \frac{\pi}{3}$$

得證： Γ 為正三角形

解： $E_1: x+y+2z=2$ 、 $E_2: 2x-y+z=1$ 交線 L 上取適當點 $(1,1,0)$ 或 $(0,0,1)$

$$d\left(\begin{pmatrix} 1,1,0 \\ 0,0,1 \end{pmatrix}, x-2y-z=5\right) = \sqrt{6} = \text{正三角形的高}$$

$$\text{故正三角形的邊長為 } \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{2}$$