

115 年大學入學學力測驗數學(數 A) 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

1. 財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？
(1) 20 元 (2) 30 元 (3) 45 元 (4) 60 元 (5) 90 元 【115 年學測數 A】

答：(2)

解：

A	吉吉	祥祥
P	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$
\$	180	90

$$E(X) = 180 \times \frac{1}{9} + 90 \times \frac{1}{9} = 20 + 10 = 30$$

2. 對任一實數 a ，令 $[a]$ 代表滿足 $[a] \leq a < [a] + 1$ 的整數，例如： $[3] = 3$ ， $[3.1] = 3$ ， $[-3.1] = -4$ 。關於函數 $f(x) = [\sqrt{99-x}] + [\sqrt{99+x}]$ ，其中 $-99 \leq x \leq 99$ ；試選出正確的選項。
(1) $f(-20) \leq f(0) < f(1)$ (2) $f(-20) < f(1) \leq f(0)$ (3) $f(1) < f(-20) \leq f(0)$
(4) $f(0) < f(-20) \leq f(1)$ (5) $f(0) \leq f(1) < f(-20)$ 【115 年學測數 A】

答：(1)

解：

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= [\sqrt{99}] + [\sqrt{99}] = 9 + 9 = 18 \\ f(1) &= [\sqrt{98}] + [\sqrt{100}] = 9 + 10 = 19 \\ f(-20) &= [\sqrt{119}] + [\sqrt{79}] = 10 + 8 = 18 \end{aligned} \right\} f(-20) = f(0) < f(1)$$

3. 設 $f(x) = a^x$ ，其中 a 為正實數。已知 c_1, c_2, c_3 是公差為 $\frac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10), f(8), f(6)$ 的公比為何？

(1) $2^{-\frac{6}{5}}$ (2) $2^{-\frac{3}{5}}$ (3) $2^{\frac{3}{5}}$ (4) $2^{\frac{6}{5}}$ (5) $2^{\frac{5}{3}}$ 【115 年學測數 A】

答：(1)

解：

$$\frac{f(c_2)}{f(c_1)} = \frac{a^{c_2}}{a^{c_1}} = a^{\frac{10}{3}} = 4 \Rightarrow a = 4^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$\text{則 } \frac{f(8)}{f(10)} = \frac{a^8}{a^{10}} = a^{-2} = \left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{-2} = 2^{-\frac{6}{5}}$$

4. 某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？

(1) 256 (2) 370 (3) 401 (4) 455 (5) 560

【115 年學測數 A】

答：(3)

解：3 種材料均為基本材料：1 種

3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料： $1 \times C_1^{10} = 10$ 種

3 種材料中 1 種為基本材料、2 種為進階材料： $6 \times C_2^{10} = 270$ 種

3 種材料均為進階材料： $C_3^{10} = 120$ 種

合計： $1 + 10 + 270 + 120 = 401$ 種

5. 已知實數三階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試問有多少個行

向量 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ 滿足 $A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $\vec{v}$ 垂直於行向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5) 無窮多個

【115 年學測數 A】

答：(5)

解： $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + xA \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，故 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1+x \\ 0 \\ 1-x \end{bmatrix}$

而 $(1+x, 0, 1-x) \cdot (0, 1, 0) = 0$ 恆成立，有無限多解

6. 坐標平面上有 $A(2, -2)$ 、 $B(-1, 2)$ 兩點，試問直線 $y = -6$ 上有多少個點 C 使得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

【115 年學測數 A】

答：(2)

解： $C(t, -6) \begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow 5 = \sqrt{(t-2)^2 + 16} \Rightarrow t = 5 \text{ (不合, } A、B、C \text{ 共線) 或 } -1 \\ \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow 5 = \sqrt{(t+1)^2 + 64} \Rightarrow \text{無解} \\ \overline{CA} = \overline{CB} \Rightarrow \sqrt{(t-2)^2 + 16} = \sqrt{(t+1)^2 + 64} \Rightarrow t = -\frac{15}{2} \end{cases}$

二、多選題 (占 30 分)

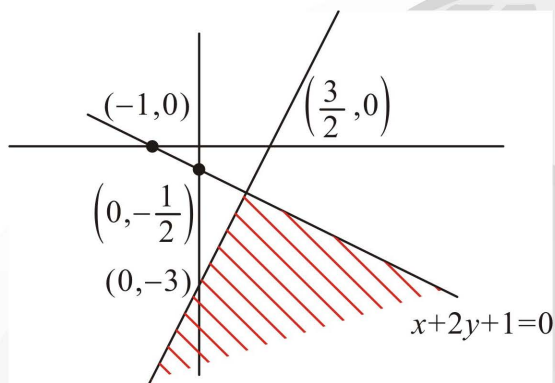
7. 坐標平面上同時滿足 $\begin{cases} 2x-y-3>0 \\ x+2y+1<0 \end{cases}$ 的點 $P(x,y)$ 可能位在下列哪些選項？

- (1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) x 軸

【115 年學測數 A】

答：(3)(4)

解：



$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，且對所有正整數 $n \geq 2$ ，令 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 。試選出正確的選項。

(1) $b_2 < c_2$ (2) $A^2 = 2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$

(4) $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$ (5) $d_{2n} - a_{2n} = (d_n)^2 - (a_n)^2$

【115 年學測數 A】

答：(2)(5)

解：(1) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = c_2 = 2$

(2) $A^2 = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2A + I$

(3) 承(2) $\xrightarrow{\times A^n} A^{n+2} = 2A^{n+1} + A^n$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{n+2} & b_{n+2} \\ c_{n+2} & d_{n+2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2a_{n+1} + a_n & 2b_{n+1} + b_n \\ 2c_{n+1} + c_n & 2d_{n+1} + d_n \end{bmatrix}$

故應為 $c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$

(4) $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} a_{2n} & b_{2n} \\ c_{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n^2 + b_n c_n & b_n (a_n + d_n) \\ c_n (a_n + d_n) & d_n^2 + b_n c_n \end{bmatrix}$

$$\text{則 } d_{2n} - a_{2n} = \left(d_n^2 + b_n c_n \right) - \left(a_n^2 + b_n c_n \right) = d_n^2 - a_n^2$$

9. T 分數為評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績為 μ 且標準差為 σ 。若某生原始成績為 S ，則他該科之 T 分數為 $T = 50 + 10 \left(\frac{S - \mu}{\sigma} \right)$ 。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆為 60，數學成績的標準差為 12，英文成績的標準差為 8。試選出正確的選項。
- (1) 若甲生英文的原始成績為 52，則其 T 分數為 40
 - (2) 各生數學的 T 分數不會超過其原始成績
 - (3) 若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高
 - (4) 若該班級兩科的及格標準均為 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低
 - (5) 該班原始成績數學對英文的迴歸直線（即最適直線）之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同
- 【115 年學測數 A】

答：(1)(2)(4)

解：(1) $T = 50 + 10 \left(\frac{52 - 60}{8} \right) = 40$

(2) 數： $T - S = 50 + 10 \left(\frac{S - 60}{12} \right) - S = -\frac{S}{6} < 0$

英： $T - S = 50 + 10 \left(\frac{S - 60}{8} \right) - S = \frac{S}{4} - 25 \xrightarrow{S < 100} < 0$

(3) 令 $S_{\text{乙數}} = 90$ 、 $S_{\text{乙英}} = 40$ 、 $S_{\text{丙數}} = 36$ 、 $S_{\text{丙英}} = 80$

故 $T_{\text{乙數}} = 75$ 、 $T_{\text{乙英}} = 25$ 、 $T_{\text{丙數}} = 30$ 、 $T_{\text{丙英}} = 75$

則 $\overline{S_{\text{乙}}} = 65 > \overline{S_{\text{丙}}} = 58$ ，但 $\overline{T_{\text{乙}}} = 50 < \overline{T_{\text{丙}}} = 52.5$

(4) $T_{\text{數}} = \frac{5}{6} S_{\text{數}} \geq 40 \Rightarrow S_{\text{數}} \geq 48$

$T_{\text{英}} = \frac{5}{4} S_{\text{英}} - 25 \geq 40 \Rightarrow S_{\text{英}} \geq 52$

(5) $m_T = r \times \frac{\sigma_{TY}}{\sigma_{TX}} = r \times \frac{\sigma_{SY} \times \frac{10}{8}}{\sigma_{SX} \times \frac{10}{12}} = m_S \times \frac{3}{2}$ ，不同

10. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$ ， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E 。

若 $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 5)$ 且 $\triangle ABE$ 面積為 3。

試選出正確的選項。

(1) $\cos \angle BAD = \frac{-7\sqrt{65}}{65}$

(2) $\triangle ABD$ 面積為 9

(3) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$

(4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\frac{65}{3}$

(5) $\overline{BC} < \frac{8}{3}$

【115 年學測數 A】

答：(1)(5)

解：(1) $\cos \angle BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-28}{\sqrt{40} \sqrt{26}} = \frac{-7}{\sqrt{65}}$

(2) $\Delta ABD = \frac{1}{2} \sqrt{40 \times 26 - (-28)^2} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

(3) $\frac{\Delta ABE}{\Delta ADE} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8} \overrightarrow{AD} = \left(\frac{13}{8}, \frac{-15}{8} \right)$

(4) 承(3), $C(13t, -15t)$, $\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC} \Rightarrow \frac{13t-1}{2} = \frac{-15t-5}{-6} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$, 故 $C\left(\frac{13}{3}, -5\right)$

則 $\Delta CBD = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -1 \\ -7 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{40}{3} \Rightarrow$ 四邊形 $ABCD$ 面積為 $8 + \frac{40}{3} = \frac{64}{3}$

(5) $\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{-7}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{58}}{3} < \frac{8}{3}$

11. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的圖形。對任一實數 $m \neq 0$, 以 L_m 表示直線 $y = mx + 1$ 。

試選出正確的選項。

(1) $m > 0$ 時, L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負

(2) 若 (a, b) 為 L_m 和 Γ 的交點, 則 $(-a, b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

(3) 可以找到一實數 $m \neq 0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{2}\right)$

(4) 若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y = -1$ 上, 則 $\frac{1}{m}$ 是奇數

(5) 若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上, 則 L_m 與 Γ 有偶數個交點

【115 年學測數 A】

答：(2)(4)

解：(1) 可交於 $(0, 1)$

(2) 畫圖即知, 正確

(3) 交點應為 $\left(\frac{20}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

(4) $-1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2}x = \text{奇數}\pi \Rightarrow x = 2 \times \text{奇數}$

則 $-1 = m(2 \times \text{奇數}) + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{-\text{奇數}} = -\frac{1}{\text{奇數}}$

(5) 可有奇數個交點

12. 令 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數為 1,

已知 $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x$ 。

令 Γ_1 和 Γ_2 分別為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形,

其對稱中心分別為 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) 。試選出正確的選項。

(1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點

(2) $a_1 + a_2$ 可唯一確定

(3) $b_1 + b_2$ 可唯一確定

(4) 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 = b_2$

(5) 若 $b_1 = b_2$ ，則 $a_1 = a_2$

【115 年學測數 A】

答：(2)(4)

解： $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + px^2 + (q+2)x + r = (x-a_1)^3 + m(x-a_1) + b_1 \\ g(x) = -x^3 + px^2 + qx + r = -(x-a_2)^3 + n(x-a_2) + b_2 \end{cases}$$

(1) $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1) = 0$ ，僅一實根，故 Γ_1 和 Γ_2 恰交於一點

(2) $p = -3a_1 = 3a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0$ ，可唯一確定

(3) $r = -a_1^3 - ma_1 + b_1 = a_2^3 - na_2 + b_2 \Rightarrow b_1 + b_2 = 2r + ma_1 + na_2$ ，不可唯一確定

(4)(5) 當 $a_1 = a_2 = 0$ ，則 $f(x) = x^3 + mx + b_1$ 、 $g(x) = -x^3 + nx + b_2$

$$\frac{f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x}{} \rightarrow b_1 = b_2$$

三、選填題 (占 25 分)

13. 某高中聘用的全體教師 $\frac{1}{4}$ 只有學士學位， $\frac{3}{4}$ 有碩士學位。只有學士學位的教師中有 $\frac{1}{5}$ 通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有 $\frac{3}{5}$ 通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率為_____。
(化為最簡分數)

【115 年學測數 A】

答： $\frac{9}{10}$

解： $\begin{cases} \text{學 } \frac{1}{4} \begin{cases} \text{英 } \frac{1}{5} \\ \text{無 } \frac{4}{5} \end{cases} \\ \text{碩 } \frac{3}{4} \begin{cases} \text{英 } \frac{3}{5} \\ \text{無 } \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases}$

$$\text{條件機率} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{5}} = \frac{9}{10}$$

14. 坐標平面上，向量 (a, b) 與直線 $y = bx - 1$ 垂直，則 $a + b$ 的最大可能值為_____。
(化為最簡分數)

【115 年學測數 A】

答： $\frac{1}{4}$

解： $(a, b) \cdot (1, b) = a + b^2 = 0$ ，則 $a + b = -b^2 + b = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

15. 已知三正數 a, b, c 成一等差數列，其中 $a < b < c$ ，且坐標平面上三點 $(a, \log 3a)$ 、 $(b, \log 4b)$ 、 $(c, \log 6c)$ 在同一直線上，則 $\frac{b}{a}$ 之值為_____。(化為最簡分數)

【115 年學測數 A】

答： $\frac{3}{2}$

解：斜率 $= \frac{\log 4b - \log 3a}{b - a} = \frac{\log 6c - \log 4b}{c - b} \Rightarrow \log \frac{4b}{3a} = \log \frac{6c}{4b}$
 $\Rightarrow \frac{4b}{3a} = \frac{6c}{4b} \Rightarrow 8b^2 = 9ac \xrightarrow{a+c=2b} 8b^2 = 9a(2b-a)$
 $\Rightarrow 8b^2 - 18ab + 9a^2 \Rightarrow 8\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 18\left(\frac{b}{a}\right) + 9 = 0 \xrightarrow{b > a} \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

16. 坐標平面上，已知二次函數圖形 $\Gamma: y = f(x)$ 的頂點 P 在直線 $y = 1 + 2x$ 上，且交 x 軸於點 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $y = 1 + 2x$ 上，且亦通過點 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，此時 P, Q 為兩相異點，則 $\overline{PQ} =$ _____。(化為最簡根式)

【115 年學測數 A】

答： $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

解： $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 之頂點 $\in y$ 軸， $y = 1 + 2x$ ，故頂點 $P(0, 1)$
 則 $a = -4$ ，即 $y = -4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = -4x^2 + 1$
 平移 $(t, 2t)$ ，得 $y = -4(x - t)^2 + 1 + 2t$ ，過 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
 $\xrightarrow{t \neq 0} t = \frac{3}{2}$ ， $Q\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ ， $\overline{PQ} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

17. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 為直角， $\overline{AB}$ 邊上一點 D ，滿足 $\angle BCD = 2\angle ACD$ ，且 $\overline{BC} = 2\overline{BD}$ 。若 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ ，則 $k =$ _____。(化為最簡分數)

【115 年學測數 A】

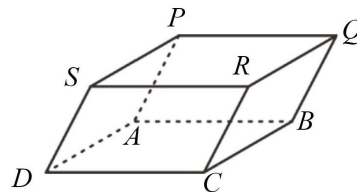
答： $\frac{3}{11}$

解： $\triangle BCD$ 中 $\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\sin 2\theta}$ ， $\theta = \angle ACD$
 $\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{4} \xrightarrow{\overline{BD} = x, \overline{BC} = 2x} (2x)^2 = (x+1)^2 + 15$
 $\Rightarrow x = \frac{8}{3}$ ， $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{1+x} = \frac{3}{11}$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$ ，如圖所示。
已知 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-5, 5, 5)$ 、 $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP} = (-2, 0, -4)$ 、 $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (6, -10, -8)$ ， $|\overrightarrow{AP}| = 6$ 。試回答下列問題。



18. 試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？（單選題）

- (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $6\sqrt{3}$ (5) $10\sqrt{2}$

【115 年學測數 A】

答：(3)

解： $ABCD$ 面積 $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 5\sqrt{3}$

19. 設 B 點坐標為 $(1, 2, 0)$ ，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。

【115 年學測數 A】

答： $x - y - z + 1 = 0$

解：平面 $ABCD$ 之法向量 $\parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \parallel (1, -1, -1)$ ，過 $(1, 2, 0)$
平面 $ABCD$ ： $x - y - z + 1 = 0$

20. 試求平行六面體的體積，並求平行六面體上（含邊界）距點 A 的最長距離。

【115 年學測數 A】

答：體積 $= 10$ 、最長距離 $= \sqrt{94}$

解： $\overrightarrow{AP} \parallel [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (-40, -40, 20) \parallel (2, 2, -1) \xrightarrow{|\overrightarrow{AP}|=6} \rightarrow = \pm(4, 4, -2)$
體積 $= |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AP}| = |(-5, 5, 5) \cdot \pm(4, 4, -2)| = 10$

解： $\overrightarrow{AB} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (10, -10, 20) \parallel (1, -1, 2)$

體積 $= |(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB}| = |(-2, 0, -4) \cdot (t, -t, 2t)| = 10 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \pm(1, -1, 2)$

$\overrightarrow{AD} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] = (-20, -30, 10) \parallel (2, 3, -1)$

體積 $= |(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}| = |(6, -10, -8) \cdot \pm(2s, 3s, -s)| = 10 \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \pm(2, 3, -1)$

皆取正，得 $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$ $\overrightarrow{AD} = (2, 3, -1)$ $\overrightarrow{AP} = (4, 4, -2)$

令 $A(0, 0, 0)$ ，則 $B(1, -1, 2)$ 、 $D(2, 3, -1)$ 、 $P(4, 4, -2)$

故 $C(3, 2, 1)$ 、 $Q(5, 3, 0)$ 、 $S(6, 7, -3)$ 、 $R(7, 6, -1)$

則最長距離為 $AS = \sqrt{36 + 49 + 9} = \sqrt{94}$

定理： 向量三重積： $\overrightarrow{AB} \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AD}$

證： $\overrightarrow{AB} \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]$

$$= (a_1, b_1, c_1) \times [(a_2, b_2, c_2) \times (a_3, b_3, c_3)]$$

$$= (a_1, b_1, c_1) \times \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a_1, b_1, c_1) \times (b_2 c_3 - c_2 b_3, c_2 a_3 - a_2 c_3, a_2 b_3 - b_2 a_3)$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ c_2 a_3 & a_2 b_3 \\ -a_2 c_3 & -b_2 a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ a_2 b_3 & b_2 c_3 \\ -b_2 a_3 & -c_2 b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 c_3 & c_2 a_3 \\ -c_2 b_3 & -a_2 c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 a_2 b_3 \\ -b_1 b_2 a_3 \\ -c_1 c_2 a_3 \\ +c_1 a_2 c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 b_2 c_3 \\ -c_1 c_2 b_3 \\ -a_1 a_2 b_3 \\ +a_1 b_2 a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 c_2 a_3 \\ -a_1 a_2 c_3 \\ -b_1 b_2 c_3 \\ +b_1 c_2 b_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AD}$$

$$= (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) (a_2, b_2, c_2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) (a_3, b_3, c_3)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ +b_1 a_2 b_3 \\ +c_1 a_2 c_3 \\ -a_1 a_2 a_3 \\ -b_1 b_2 a_3 \\ -c_1 c_2 a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 b_2 a_3 \\ +b_1 b_2 b_3 \\ +c_1 b_2 c_3 \\ -a_1 a_2 b_3 \\ -b_1 b_2 b_3 \\ -c_1 c_2 b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 c_2 a_3 \\ +b_1 c_2 b_3 \\ +c_1 c_2 c_3 \\ -a_1 a_2 c_3 \\ -b_1 b_2 c_3 \\ -c_1 c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 a_2 b_3 \\ -b_1 b_2 a_3 \\ -c_1 c_2 a_3 \\ +c_1 a_2 c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 b_2 c_3 \\ -c_1 c_2 b_3 \\ -a_1 a_2 b_3 \\ +a_1 b_2 a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 c_2 a_3 \\ -a_1 a_2 c_3 \\ -b_1 b_2 c_3 \\ +b_1 c_2 b_3 \end{pmatrix}$$

定理： 向量三重積： $[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}] = (V) \overrightarrow{AC}$

證： $[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]$

$$= ([\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AC} - ([\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AD}$$

$$= ([\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AC}$$

$$= (V) \overrightarrow{AC}$$

定理： 向量三重積： $[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}] \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}) = (V)^2$

證： $[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] \times [\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}] \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB})$

$$= [(V) \overrightarrow{AC}] \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB})$$

$$=(V)^2$$

定理： 向量三重積：
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} = (V)^2$$

解： $\overrightarrow{AP} \parallel [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (-40, -40, 20) \parallel (2, 2, -1)$

$$\xrightarrow{\overline{AP}=6} = \pm(4, 4, -2), \text{取正}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (10, -10, 20) \parallel (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (4, 4, -2) \times (1, -1, 2) = (6, -10, -8), \text{故 } t=1, \text{得 } \overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] = (-20, -30, 10) \parallel (2, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP} = s(2, 3, -1) \times (4, 4, -2) = (-2, 0, -4), \text{故 } s=1, \text{得 } \overrightarrow{AD} = (2, 3, -1)$$

$$\text{體積} = |(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB}| = |(-2, 0, -4) \cdot (1, -1, 2)| = 10$$

$$\text{令 } A(0, 0, 0), \text{則 } B(1, -1, 2)、D(2, 3, -1)、P(4, 4, -2)$$

$$\text{故 } C(3, 2, 1)、Q(5, 3, 0)、S(6, 7, -3)、R(7, 6, -1)$$

$$\text{則最長距離為 } \overline{AS} = \sqrt{36+49+9} = \sqrt{94}$$

解： $\overrightarrow{AP} \parallel [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (-40, -40, 20) \parallel (2, 2, -1) \xrightarrow{\overline{AP}=6} = \pm(4, 4, -2)$

$$\text{體積} = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AP}| = |(-5, 5, 5) \cdot \pm(4, 4, -2)| = 10$$

解： $\overrightarrow{AB} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}] = (10, -10, 20) \parallel (1, -1, 2)$

$$\text{體積} = |(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB}| = |(-2, 0, -4) \cdot (t, -t, 2t)| = 10 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \pm(1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} \parallel [\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}] \times [\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}] = (-20, -30, 10) \parallel (2, 3, -1)$$

$$\text{體積} = |(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}| = |(6, -10, -8) \cdot \pm(2s, 3s, -s)| = 10 \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \pm(2, 3, -1)$$

$$\text{皆取正，得 } \overrightarrow{AB} = (1, -1, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (2, 3, -1) \quad \overrightarrow{AP} = (4, 4, -2)$$

$$\text{令 } A(0, 0, 0), \text{則 } B(1, -1, 2)、D(2, 3, -1)、P(4, 4, -2)$$

$$\text{故 } C(3, 2, 1)、Q(5, 3, 0)、S(6, 7, -3)、R(7, 6, -1)$$

$$\text{則最長距離為 } \overline{AS} = \sqrt{36+49+9} = \sqrt{94}$$