

大學入學 115 年(114 學年度)

分科測驗 數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題 (佔 72 分)

一、單選題 (佔 30 分)

1. 試選出 $\log_2 (8\sqrt{2}) - \log_2 (4\sqrt{2})$ 的值。

- (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{5}{2}$

【115 分科測驗數乙】

答：(1)

解：所求 $= \log_2 \left(\frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \right) = \log_2 2 = 1$

2. 設 $i = \sqrt{-1}$ 、複數 $z = 2 + i$ 、 $w = 1 + i$ 。試問下列哪一個複數的絕對值等於 5？

- (1) $z - w$ (2) $z - 2w$ (3) $z - 3w$ (4) $z - 4w$ (5) $z - 5w$

【115 分科測驗數乙】

答：(5)

解： $|z - tw| = |(2+i) - t(1+i)| = |(2-t) + (1-t)i| = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-t)^2 + (1-t)^2} = 5 \Rightarrow 2t^2 - 6t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5, -2 \text{ (不合)}$$

3. 一袋中有三顆球，球上分別印有號碼 1, 2, 6。假設每次抽球時，袋中每顆球被抽到的機率均相等，考慮以下三種情況：

(甲) 隨機抽出一顆球，設此球號碼的期望值為 a 。

(乙) 隨機抽出一顆球，記錄號碼後放回袋中，再隨機抽出一顆球，設前後兩顆球號碼平均數的期望值為 b 。

(丙) 隨機抽出一顆球，取後不放回，再隨機抽出另一顆球，設前後兩顆球號碼平均數的期望值為 c 。

有關 a, b, c 的大小關係，試選出正確的選項。

- (1) $a > b > c$ (2) $a = b > c$ (3) $a = b = c$ (4) $a = b < c$ (5) $a < b < c$

【115 分科測驗數乙】

答：(3)

解： $a = \frac{1}{3}(1+2+6) = 3$ ， $b = \frac{1}{2}(3+3) = 3$ ， $c = \frac{2}{3 \times 2} \left(\frac{(1+2) + (1+6) + (2+6)}{2} \right) = \frac{1}{3}(9) = 3$

4. 坐標平面上有一圓 Γ ，已知直線 $L: y = x$ 與圓 Γ 相切，且圓 Γ 的圓心對直線 L 的對稱點坐標為 $(5, 3)$ ，試選出圓 Γ 的方程式。

- (1) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$ (2) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 2$ (3) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$
(4) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 2$ (5) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

【115 分科測驗數乙】

答：(4)

解： $d[(5, 3), x - y = 0] = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \text{半徑}$

$(5, 3)$ 關於 $y = x$ 之對稱點 $(3, 5)$

$$\Gamma : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 2$$

5. 坐標空間中有一點 $A(6, 8, -8)$ ，試問在 x 軸、 y 軸、 z 軸這三條坐標軸上，總共有幾個點與點 A 的距離等於 10？

- (1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6

【115 分科測驗數乙】

答：(2)

解： $\sqrt{(x-6)^2 + 64 + 64} = 10 \Rightarrow$ 無解

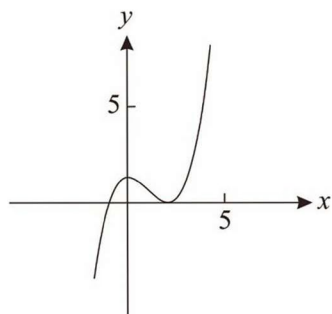
$$\sqrt{36 + (y-8)^2 + 64} = 10 \Rightarrow y = 8$$

$$\sqrt{36 + 64 + (z+8)^2} = 10 \Rightarrow z = -8$$

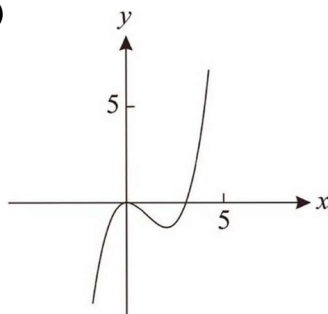
共 2 解

6. 設三次多項式 $f(x) = \int_0^x t(t-2)dt$ ，試問下列選項中，哪一個最有可能是函數 $y = f(x)$ 在坐標平面上的圖形？

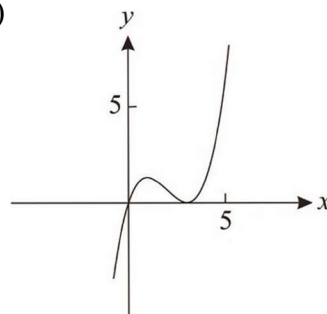
(1)



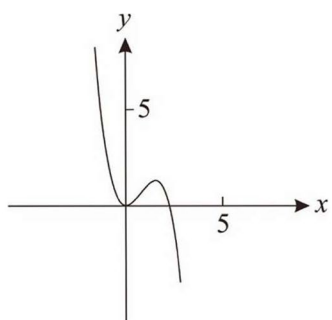
(2)



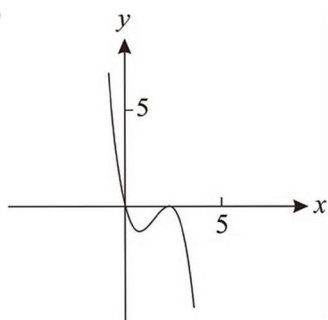
(3)



(4)



(5)



【115 分科測驗數乙】

答：(2)

解： $f(0) = 0$ 且 $f'(x) = x(x-2)$ 且領導係數為正

二、多選題 (佔 24 分)

7. 根據經驗，某甲在閱讀某社群媒體上的文章時，對每篇文章是否「按讚」為獨立事件，且對每篇文章「按讚」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。已知某甲在某日依序讀了 4 篇文章。試選出正確的選項。

(1) 某甲對第 4 篇文章「按讚」的機率是 $\frac{1}{3}$

(2) 在某甲對第 1 篇文章「按讚」的條件下，某甲對第 2 篇文章「按讚」的機率小於 $\frac{1}{3}$

(3)某甲在此 4 篇文章中，恰對 2 篇文章「按讚」的機率是 $\frac{4}{81}$

(4)某甲在此 4 篇文章中，至少對 2 篇文章「按讚」的機率是 $\frac{11}{27}$

(5)某甲在此 4 篇文章中，至少連續對 2 篇文章「按讚」的機率是 $\frac{7}{27}$ 【115 分科測驗數乙】

答：(1)(4)(5)

解：(2)應等於 $\frac{1}{3}$

$$(3) C_2^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$(4) C_2^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_3^4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$$

$$(5) 1 - C_0^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 - C_1^4 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{21}{81} = \frac{7}{27}$$

8. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ 為等差數列，且滿足 $10^{a_3} = 2$ ， $10^{a_5} = 5$ 。試選出正確的選項。

(1) $10^{a_1}, 10^{a_2}, 10^{a_3}, \dots, 10^{a_7}$ 為等比數列

$$(2) 10^{a_7} = \frac{25}{2}$$

$$(3) a_4 = \log \frac{7}{2}$$

$$(4) a_1 > 0$$

$$(5) \sum_{k=3}^6 (a_{k+1} - a_k) = 2 - 4\log 2$$

【115 分科測驗數乙】

答：(1)(2)(5)

$$\text{解： } a_3 = \log 2, a_5 = \log 5 \Rightarrow 2d = a_5 - a_3 = \log \frac{5}{2} \Rightarrow d = \log \sqrt{\frac{5}{2}}$$

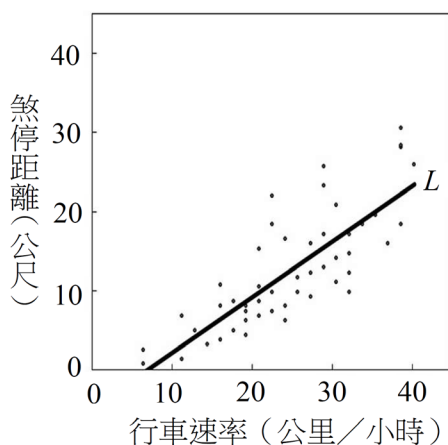
$$a_1 = a_3 - 2d = \log 2 - \log \frac{5}{2} = \log \frac{4}{5} < \log 1 = 0$$

$$a_4 = a_3 + d = \log 2 + \log \sqrt{\frac{5}{2}} = \log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$$

$$a_7 = a_5 + 2d = \log 5 + \log \frac{5}{2} = \log \frac{25}{2} \Rightarrow 10^{a_7} = \frac{25}{2}$$

$$\sum_{k=3}^6 (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=3}^6 (d) = 4d = 2\log \frac{5}{2} = \log \frac{25}{4} = \log \frac{100}{16} = 2 - 4\log 2$$

9. 某甲收集某廠牌車輛 50 筆行車速率（公里／小時）與煞停距離（公尺）的數據，並以行車速率為 x 軸、煞停距離為 y 軸繪製成散布圖，如下圖所示，其中直線 L 為 y 對 x 的最適直線（迴歸直線）。



已知此 50 筆行車速率與煞停距離數據的平均數分別為 24.8 與 12.6，相關係數為 0.8，且直線 L 通過點 $(6.8, 0)$ 。試選出正確的選項。

- (1) 直線 L 通過點 $(12.6, 24.8)$
- (2) 直線 L 的斜率為 0.8
- (3) 當此廠牌車輛的行車速率為每小時 46.8 公里時，以最適直線 L 推估其煞停距離應為 28 公尺
- (4) 設此 50 筆數據行車速率的標準差為 σ_x (公里/小時)，且煞停距離的標準差為 σ_y (公尺)，則 $\sigma_x > \sigma_y$
- (5) 若此 50 筆數據改以煞停距離為 x 軸、行車速率為 y 軸，則 y 對 x 的最適直線斜率為 $\frac{10}{7}$

【115 分科測驗數乙】

答：(3)(4)

解：(1) 迴歸直線必過 $(\bar{X}, \bar{Y}) = (24.8, 12.6)$

$$(2) m = \frac{12.6 - 0}{24.8 - 6.8} = \frac{12.6}{18} = 0.7$$

$$(3) L : (y - 12.6) = 0.7(x - 24.8) \xrightarrow{x=46.8} y = 28$$

$$(4) 0.7 = 0.8 \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{7}{8}$$

$$(5) m' = 0.8 \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.8 \times \frac{8}{7} = \frac{0.64}{7}$$

三、選填題 (佔 18 分)

10. 設二階實數方陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。已知 $A^2 + 2A = 3I$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【115 分科測驗數乙】

答：-3

$$\text{解： } A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2A - 3I = \begin{bmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \text{ 且 } a + 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

11. 坐標平面上有四邊形 Γ ，其四個頂點分別為 $(6, 1)$ ， $(5, 5)$ ， $(2, 7)$ 和 $(-1, 8)$ 。若點 $P(x, y)$ 在 Γ 的內部（含邊界），則 $x + 4y$ 的最大值為_____。【115 分科測驗數乙】

答：31

解：

(x, y)	$(6, 1)$	$(5, 5)$	$(2, 7)$	$(-1, 8)$
$x + 4y$	10	25	30	31

12. 箱中有編號分別為 $1, 2, 3, \dots, 10$ 的卡片各一張，共 10 張卡片。從箱子中一次取出 6 張卡片，此 6 張卡片編號的中位數恰為 5 的組合共有_____種。【115 分科測驗數乙】

答：21

解： $a, b, 4, 6, c, d \Rightarrow C_2^3 C_2^4 = 18$

$a, b, 3, 7, c, d \Rightarrow C_2^2 C_2^3 = 3$

共 21 組

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 28 分）

13-15 題為題組

某藥廠經營者希望能夠控制成本。假設當藥廠產量為 x 公斤時，總成本函數為 $C(x)$ （單位：萬元），其中 $C(0)$ 稱為固定成本， $C(x) - C(0)$ 稱為變動成本函數。

當 $x > 0$ 時，變動成本函數除以產量稱為平均變動成本函數 $A(x)$ （單位：萬元／公斤），即平均變動成本函數為 $A(x) = \frac{C(x) - C(0)}{x}$ 。

今已知該藥廠的總成本函數為 $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 42$ ，其中 $0 \leq x \leq 15$ 。根據上述，試回答下列問題。

13. 試問此藥廠的固定成本為多少萬元？（單選題）

(1) 12 (2) 42 (3) 60 (4) 90 (5) 91

【115 分科測驗數乙】

答：(2)

解： $C(0) = 42$

14. 當 $0 < x \leq 15$ 時，試求此藥廠的平均變動成本函數 $A(x)$ ，並求右極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x)$ 的值。

【115 分科測驗數乙】

答：60

解： $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 - 12x^2 + 60x + 42 - 42}{x} \right) = 60$

15. 試求此藥廠的平均變動成本函數 $A(x)$ 的最小值，並求此時藥廠產量為多少公斤？

【115 分科測驗數乙】

答：產量 6 公斤時， $Min = 24$ （萬元／公斤）

解： $A(x) = x^2 - 12x + 60 = (x-6)^2 + 24$
當 $x = 6$ 時，有 $Min = 24$

16-18 題為題組

坐標平面上有一向量 $\vec{u} = (1, 2)$ 及三點 $A(1, 1)$ 、 $B(4, 2)$ 、 C ，其中點 C 位於第二象限。
已知 $\vec{u}$ 與向量 $\vec{CA}$ 垂直，且 $\vec{u}$ 與向量 $\vec{CB}$ 的夾角為 θ ，其餘弦值為 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 。根據上述，
試回答下列問題。

16. 試問下列哪一個向量與向量 $\vec{u}$ 垂直？（單選題）

(1) $(-2, 1)$ (2) $(-1, 0)$ (3) $(-1, -2)$ (4) $(1, -1)$ (5) $(2, 1)$

【115 分科測驗數乙】

答：(1)

解： $(1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$

17. 試求向量 $\vec{AB}$ 以及 $\cos \angle BAC$ 的值。

【115 分科測驗數乙】

答： $\vec{AB} = (3, 1)$ 、 $\cos \angle BAC = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

解： $\vec{CA} = t(-2, 1) \Rightarrow C(2t+1, -t+1) \in \text{第二象限}$
 $\Rightarrow \vec{CB} = (3-2t, 1+t)$ ， $|\vec{CB}| = \sqrt{5t^2 - 10t + 10}$
 $\cos \theta = \frac{(1, 2) \cdot (3-2t, 1+t)}{\sqrt{5} \sqrt{5t^2 - 10t + 10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow t = -2, 4$ （不合）
故 $C(-3, 3) \Rightarrow \vec{AB} = (3, 1)$ ， $\vec{AC} = (-4, 2)$
 $\cos \angle BAC = \frac{(3, 1) \cdot (-4, 2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

18. 試求線段 $\overline{BC}$ 的長度。

【115 分科測驗數乙】

答： $5\sqrt{2}$

解： $\overline{BC} = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$