

115 年大學入學學力測驗數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 35 分)

1. 當標準值為 95，試選出有幾個整數 N 與標準值的誤差百分比 $\frac{|N-95|}{95} \times 100\%$ 小於 5%。

(1) 4 個 (2) 5 個 (3) 8 個 (4) 9 個 (5) 10 個

【115 年學測數 B】

答：(4) (第一冊第一章實數)

解： $\frac{|N-95|}{95} \times 100\% < 5\% \Rightarrow |N-95| < \frac{19}{4} \xrightarrow{N \in \mathbb{Z}} N = 91, 92, \dots, 99$

2. 以計算機的自然對數按鍵 \ln (即 $\ln x = \log_e x$) 估算連續複利本利和 $100e^{\frac{3n}{100}} = 135$ 所需期數 n ，試選出等於 n 的選項。

(1) $\frac{3}{100} \ln(135-100)$ (2) $\frac{100}{3} \ln(135-100)$ (3) $\frac{135}{100} \ln\left(\frac{3}{100}\right)$
(4) $\frac{3}{100} \ln\left(\frac{135}{100}\right)$ (5) $\frac{100}{3} \ln\left(\frac{135}{100}\right)$

【115 年學測數 B】

答：(5) (第三冊第二章對數)

解： $\ln\left(100e^{\frac{3n}{100}}\right) = \ln 135 \Rightarrow \ln 100 + \frac{3n}{100} = \ln 135 \Rightarrow n = \frac{100}{3} \times \ln\left(\frac{135}{100}\right)$

3. 已知實數二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 以及 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試選出 A 的反方陣。

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

【115 年學測數 B】

答：(2) (第四冊第二章矩陣)

解： $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. 電腦程式模擬在太平洋等速航行的甲、乙兩艘船。甲船沿著北緯 60 度向西航行，乙船沿著赤道向東航行。在某一時間點甲船在西經 169 度、乙船在東經 140 度，試選出當甲船到達東經 171 度時，乙船在東經幾度。

(1) 120 度 (2) 130 度 (3) 150 度 (4) 160 度 (5) 180 度

【115 年學測數 B】

答：(3) (第四冊第一章地球儀)

解：北緯 60° 之緯線圓半徑： $R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$

故甲船由西經 169 度（向西）到東經 171 度，走 20 度
則乙船由東經 140 度（向東）到東經 150 度，走 10 度

5. 某人購買公益彩券，第一次以 N 元為投注金額。之後每次要投注時，先將前次投注金額增加一半設為預定金額。如果預定金額大於 $2N$ 元，則將預定金額減少一半投注；否則就以預定金額投注。前四次投注紀錄如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次
預定金額(元)		$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{4}N$	$\frac{27}{16}N$
投注金額(元)	N	$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{8}N$	$\frac{27}{16}N$

試選出此人第七次的投注金額為多少元。

- (1) $\frac{3^6}{2^6}N$ (2) $\frac{3^6}{2^8}N$ (3) $\frac{3^6}{2^9}N$ (4) $\frac{3^7}{2^7}N$ (5) $\frac{3^7}{2^{10}}N$

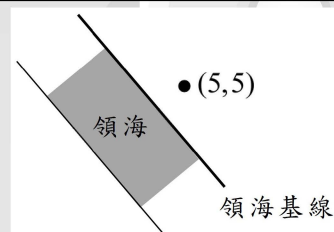
【115 年學測數 B】

答：(3) **（常識）**

解： $N \rightarrow \frac{3}{2}N \rightarrow \frac{9}{4}N \Rightarrow \frac{9}{8}N \rightarrow \frac{27}{16}N \rightarrow \frac{81}{32}N \Rightarrow \frac{81}{64}N \rightarrow \frac{243}{128}N \rightarrow \frac{729}{256}N \Rightarrow \frac{729}{512}N$
第三次 第五次 第七次

解： $\frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} > 2}{\text{因為}} \rightarrow \text{所求} = N \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{3^6}{2^9}N$

6. 各國沿岸的「領海基線」其外側距離基線十二浬間之海域，為該國之「領海」。在以浬為單位的坐標平面上，某國有一部分的領海基線為直線 $L: 4x + 3y - 12 = 0$ 上的某一線段，且 $(5, 5)$ 位於該領海基線的內側，如圖所示。試選出該段領海在 L 與下列哪一條直線之間。



- (1) $4x + 3y + 48 = 0$ (2) $4x + 3y + 18 = 0$ (3) $4x + 3y = 0$
(4) $4x + 3y - 24 = 0$ (5) $4x + 3y - 72 = 0$

【115 年學測數 B】

答：(1) **（第三冊第三章直線）**

解： $L': 4x + 3y + k = 0$, $d(L, L') = \frac{|k - (-12)|}{5} = 12$
 $\Rightarrow k = 48$ 或 -72 （不合， $(5, 5)$ 在 L 、 L' 同側）

7. 有 A 、 B 、 C 三種福袋各一個，其中 A 、 B 、 C 中獎的機率分別為 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，且不同福袋中獎與否互不影響。設在福袋 A 中獎的條件下，至少有兩個福袋中獎的機率為 p ，且設在至少有兩個福袋中獎的條件下，福袋 A 中獎的機率為 q 。試選出 $\frac{p}{q}$ 之值。

- (1) $\frac{11}{18}$ (2) $\frac{17}{18}$ (3) 1 (4) $\frac{18}{17}$ (5) $\frac{18}{11}$

【115 年學測數 B】

答：(2) **（第四冊第三章條件機率）**

$$\begin{aligned} \text{解： } p &= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6} \\ q &= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{15}{17} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{18} \end{aligned} \right.$$

二、多選題 (占 25 分)

8. 試選出與函數 $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3$ 在每個實數 x 所得函數值皆相同的函數。

- (1) $y = 6\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$ (2) $y = 3\sin\left(\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right)x + \pi\right) + 3$
 (3) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{5}x - \pi\right) + 3$ (4) $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) - 3$ (5) $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$

【115 年學測數 B】

答：(3)(5) **(第三冊第一章三角函數圖形)**

解： $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3 = -3\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3 = 3\sin\left(\frac{\pi}{5}x - \pi\right) + 3$

(1) 振幅不同 (2) 週期不同 (4) 值域不同

9. 設 $f(x) = (1-x)(2-x)^2(4+x)$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 除以 $(1-x)(2-x)(4+x)$ 的餘式為 $-x+2$
 (2) 若將 $f(x)$ 表為 $a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2$ ，則 $c = -6$
 (3) $f(x) > 0$ 的解區間為 $(-4, 2)$
 (4) $\frac{f(2026)}{f(-2022)} > 1$
 (5) $f(2026) > f(-2022)$

【115 年學測數 B】

答：(2)(4) **(第一冊第二章多項函數)**

解：(1) 餘式為 0

$$(2) f(x) = (x-2)^2 \left[-x^2 - 3x + 4 \right] = -(x-2)^4 - 7(x-2)^3 - 6(x-2)^2$$

$$(3) f(x) = -(x-1)(x-2)^2(x+4) > 0 \Rightarrow x \in (-4, 2), x \neq 2$$

$$(4) \frac{f(2026)}{f(-2022)} = \frac{(-2025)(2024)^2(2030)}{(2023)(2024)^2(-2018)} > 1$$

$$(5) \text{應為 } f(2026) < f(-2022)$$

10. 某研究探討昆蟲的身長與其體內兩種養分 A 、 B 濃度的關係。研究中蒐集某種昆蟲，測得牠們身長與體內 A 濃度的數據如下表。

	平均數	變異數	相關係數
身長	65 單位	100 平方單位	0.75
A 濃度	50 單位	225 平方單位	

已知每隻昆蟲體內的 B 濃度均為 A 濃度的 0.5 倍。試選出正確的選項。

- (1) B 濃度的標準差為 $\frac{15}{2}$ 單位
 (2) 若身長的中位數為 65 單位，則 B 濃度的中位數為 25 單位
 (3) B 濃度與 A 濃度的相關係數為 0.5
 (4) 若找到一身長為 65 單位的昆蟲，利用 A 濃度對身長的迴歸直線（最適直線）預測，其體內 A 濃度為 50 單位
 (5) B 濃度 (Y) 對身長 (X) 的迴歸直線斜率為 $\frac{1}{2}$

【115 年學測數 B】

答：(1)(4) **（第二冊第二章數據分析）**

解：(1) $\bar{B} = 25$ 、 $S_B = \frac{15}{2}$

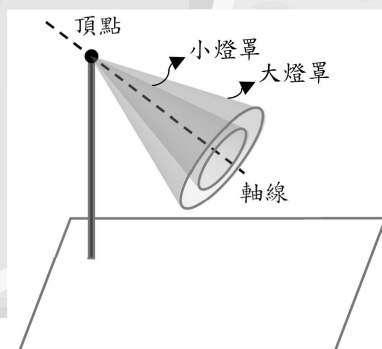
(2) 無法確定

(3) $\xrightarrow{B=0.5A} r_{AB} = 1$

(4) 迴歸直線必過算術平均

(5) $\xrightarrow{r_{XA}=r_{XB}=0.75} m = 0.75 \times \frac{\frac{15}{2}}{10} = 0.5625 \neq \frac{1}{2}$

11. 有一立燈為了採光，採用兩個可以替換的大、小燈罩。兩燈罩皆為直圓錐面的一部分，裝在燈上其軸線位置相同、燈源皆在頂點，且大燈罩照射在地面上的光線範圍大於小燈罩的光線範圍，如圖所示。令大、小燈罩在地面上所成的光線邊緣分別為圓錐曲線 Γ 、 γ 的一部分。試選出正確的選項。



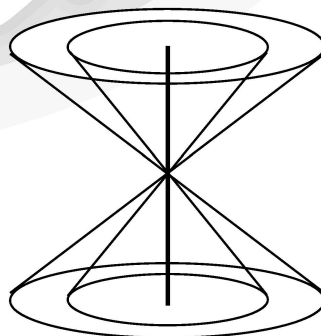
- (1) 如果 Γ 是橢圓，則 γ 是拋物線
 (2) 如果 Γ 是拋物線，則 γ 是橢圓
 (3) 如果 Γ 是雙曲線，則 γ 是拋物線
 (4) 如果 γ 是拋物線，則 Γ 是拋物線
 (5) 如果 γ 是雙曲線，則 Γ 是雙曲線

【115 年學測數 B】

答：(2)(5) **（第四冊第一章圓錐曲線）**

解：比較母線，知

- (1) 如果 Γ 是橢圓，則 γ 是橢圓
 (2) 當 Γ 是拋物線，則 γ 必是橢圓
 (3) 如果 Γ 是雙曲線，則 γ 皆有可能
 (4) 如果 γ 是拋物線，則 Γ 是雙曲線
 (5) 當 γ 是雙曲線，則 Γ 必是雙曲線



12. 有兩容器， A 瓶內有含糖 100 公克的紅茶 1000 毫升， B 瓶內有不含糖的紅茶 500 毫升。用以下方式稀釋 A 瓶的甜度：

將 A 瓶混合均勻後，倒出 500 毫升至 B 瓶，再將 B 瓶混合均勻後，倒 500 毫升回 A 瓶，稱此為一次稀釋。重複此稀釋動作，令第 n 次稀釋完， A 瓶的含糖量為 a_n 公克。

試選出正確的選項。

(1) $a_1 = 75$

(2) 第 n 次稀釋完， B 瓶的含糖量為 $50 - \frac{1}{2}a_n$ 公克

(3) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(100 - \frac{1}{2}a_n\right)$

(4) 可找到實數 c 滿足數列 $\left\langle a_n - c \right\rangle$ 為公比是 $\frac{1}{4}$ 的等比數列

(5) 第 100 次稀釋完， A 瓶的含糖量小於 60 公克

【115 年學測數 B】

答：(1)(3)(4) **(第二冊第一章數列級數)**

解：(1) $a_1 = 50 + 50 \times \frac{1}{2} = 75$

(2) $A + B = 100 \Rightarrow B = 100 - a_n$

(3) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(100 - \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{4}a_n + 50$

(4) $\left(a_{n+1} + c\right) = \frac{1}{4}\left(a_n + c\right) \xrightarrow{-c + \frac{1}{4}c = 50} c = -\frac{200}{3}$

(5) $\left(a_n - \frac{200}{3}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{200}{3}\right) \xrightarrow{a_1 = 75} a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{25}{3}\right) + \frac{200}{3} > 60$

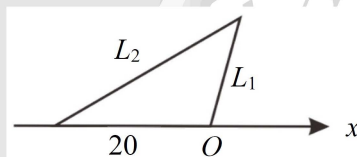
三、選填題 (占 25 分)

13. 坐標平面上， L_1 通過原點 O 且斜角為 75° 的直線；

L_2 為通過點 $(-20, 0)$ 且斜角為 30° 的直線，如圖所示。

則 L_1 、 L_2 的交點到原點的距離為_____。

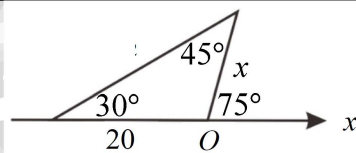
(四捨五入至整數)



【115 年學測數 B】

答：14 **(第二冊第四章三角比)**

解： $\frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow x = 10\sqrt{2} = 14.14$



14. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七個數字排成一個七位數。若要求排出的數字 3, 4 相鄰、5, 6 相鄰以及 6, 7 相鄰，則共可排出_____個七位數。

【115 年學測數 B】

答：96 **(第二冊第三章排列組合)**

解： $\frac{4!}{1} \times \frac{2!}{1} \times \frac{(2!)}{1} = 96$

1, 2, (34), (567) 共 4 團 3, 4 相鄰，可互換 5, 6, 7 相鄰，僅 5, 7 可互換

15. 某校健康檢查：全體學生中有近視的占 $\frac{1}{2}$ 、有蛀牙的占 $\frac{1}{3}$ 。設 p 為全體學生中無近視且無蛀牙的學生所占比例。將部分資料依所占比例以列聯表呈現如下：

	有近視	無近視	總和
有蛀牙			$\frac{1}{3}$
無蛀牙		p	$\frac{2}{3}$
總和	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

已知有近視的學生中，有蛀牙的占少數；有蛀牙的學生中，有近視的占多數。則 p 的範圍為_____。（化為最簡分數）

【115 年學測數 B】

答： $\frac{1}{3} < p < \frac{5}{12}$ （第四冊第三章列聯表）

解：

	有近視	無近視
有蛀牙	$p - \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} - p$
無蛀牙	$\frac{2}{3} - p$	p

 $\Rightarrow \begin{cases} p - \frac{1}{6} < \frac{2}{3} - p \\ p - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - p \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < p < \frac{5}{12}$

16. 坐標平面上， L 為一次函數 $y = f(x)$ 的圖形， Γ 為二次函數 $y = g(x)$ 的圖形。已知 L 與 Γ 交於 $(1, 0)$ 、 $(5, 4)$ 兩點，且點 $(2, 2)$ 在 Γ 上。則 $g(x) - f(x)$ 的最大值為_____。（化為最簡分數）

【115 年學測數 B】

答： $\frac{4}{3}$ （第一冊第二章一次二次函數）

解：

$$y = g(x) = ax^2 + bx + c \begin{cases} \text{過}(1, 0) \Rightarrow a + b + c = 0 \\ \text{過}(5, 4) \Rightarrow 25a + 5b + c = 4 \\ \text{過}(2, 2) \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = 3, c = -\frac{8}{3}$$

$$y = f(x) = x - 1$$

$$\text{則 } g(x) - f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + \frac{4}{3}$$

17. 利用單點透視法將坐標空間的點繪製在畫布的坐標平面上。已知

（一）空間中與 y 軸平行的直線，在畫布上的消失點為 $(0, 15)$

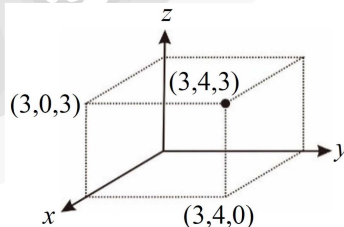
（二）空間中與 z 軸平行的直線，在畫布上都與 y 軸平行

若點 $(0, 0, 0)$ 、 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$ 繪在畫布上分別為

$(0, 0)$ 、 $\left(\frac{13}{5}, 2\right)$ 、 $(3, 3)$ ，則點 $(3, 4, 3)$ 繪在畫布上的

y 坐標為_____。（化為最簡分數）

（註：右圖為三點 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$ 、 $(3, 4, 3)$ 於坐標空間的位置關係）



【115 年學測數 B】

答： $\frac{23}{5}$ (第三册第三章透視圖)

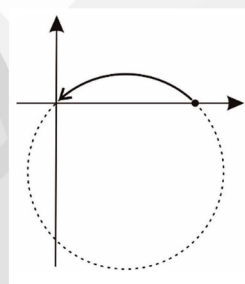
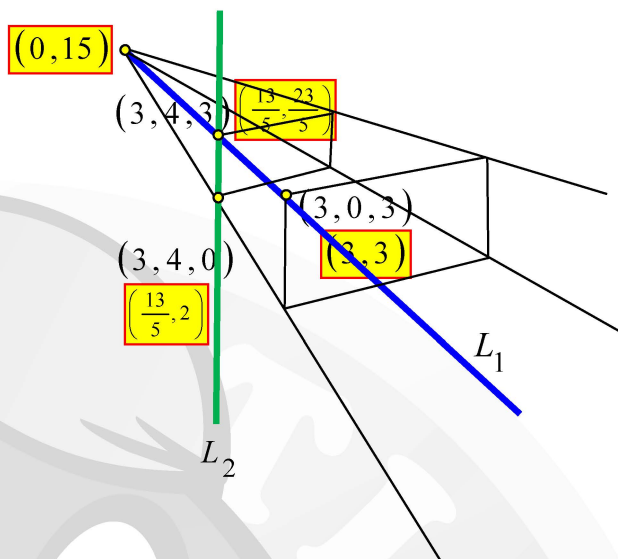
解： $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 4, 3)$ 在空間同鉛直線(綠)
 $(3, 0, 3)$ 、 $(3, 4, 3)$ 在空間同水平線(藍)
 而點 $(0, 0, 0)$ 、 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$
 繪在畫布上分別

為 $(0, 0)$ 、 $(\frac{13}{5}, 2)$ 、 $(3, 3)$

故 L_1 (過 $(0, 15)$ 、 $(3, 3)$) : $4x + y = 15$

故 L_2 (過 $(\frac{13}{5}, 2)$ 之鉛直線) : $x = \frac{13}{5}$

L_1 、 L_2 交於 $(\frac{13}{5}, \frac{23}{5})$



第貳部分：混合題或非選擇題 (占 15 分)

18-20 題為題組

有一張星軌照片，照片中的星星各自繞著以北極星為圓心且以逆時鐘方向旋轉 90° 角所畫出的圓弧軌跡。在此照片所設的坐標平面上令北極星為點 P 。已知甲星軌跡的起點、終點坐標分別為 $(8, 0)$ 、 $(0, 0)$ ，軌跡如圖所示。根據上述，試回答下列問題。

18. 試選出甲星軌跡的起點與終點連線線段的中垂線方程式。(單選題)

- (1) $x = 4$ (2) $y = 4$ (3) $y = x - 4$ (4) $y = -x + 4$ (5) $y = 4x$

【115 年學測數 B】

答：(1) (第一册第三章直線與圓)

解：起點 $(8, 0)$ 與終點 $(0, 0)$ 連線線段的中垂線方程式 $x = 4$

19. 令 L 為通過點 $(8, 0)$ 且斜率為 1 的直線。試說明點 P 在 L 上，並求甲星軌跡所在的圓方程式。
 【115 年學測數 B】

答： $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 32$ (第一册第三章直線與圓)

解：起點 $(8, 0)$ 與終點 $(0, 0)$ ，以 P 為圓心旋轉 90° ，

表半徑 $4\sqrt{2}$ 、圓心 $(4, -4) \Rightarrow$ 圓方程式： $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 32$

而 L 為 $y = x - 8$ ，恰過圓心 $P(4, -4)$

20. 已知照片中乙星軌跡的起點 Q 坐標為 $(2, 8)$ 。令 R 為其軌跡終點，試求 \overrightarrow{PR} 以及點 R 的坐標。
 【115 年學測數 B】

答： $R(-8, -6)$ 、 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ (第一册第三章直線與圓)

解： $m_{PQ} = -6 \xrightarrow{PQ \perp PR} m_{PR} = \frac{1}{6} \Rightarrow \overrightarrow{PR} : x - 6y = 28$

令 $R(28 + 6t, t) \Rightarrow$ 半徑 $^2 = (24 + 6t)^2 + (t + 4)^2 = (2 - 4)^2 + (8 + 4)^2 \Rightarrow t = -6$ 或 -2 ，

故 $R(-8, -6)$ 或 $(16, -2)$ (不合，以逆時鐘方向旋轉 90° 角)，則 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$

解： $\overrightarrow{PQ} = (-2, 12)$ ，以 P 為圓心逆時鐘方向旋轉 90° 角，故 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ ，即 $R(-8, -6)$