數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(3)	(3)	(5)	(2)	(3)	(4)
8.	9.	10.	11.			
(1)(2)	(1)(4)(5)	(1)(2)(3)	(3)(5)			

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：一次方程式變換運算

解析：方程式取倒數 $2022x-1=\dfrac{1}{2023}$，

移項得 $2022x=\dfrac{2024}{2023}$

整理得 $2023x=\dfrac{2024}{2022}=\dfrac{1012}{1011}$

$\Rightarrow 2023x-1=\dfrac{1}{1011}\Rightarrow\dfrac{1}{2023x-1}=1011$

故選(1)。

2. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：實數計算與數線位置關係、算幾不等式

解析：(1)╳：有理數、無理數皆可能

(2)╳：當 $d=\sqrt{2}$ 時為無理數

(3)○：根據算幾不等式 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}=c$

也就是點 A 和點 B 的中點 $\dfrac{63}{8}>c$

即中點位於點 C 的右邊

(4)╳：b、c 之間的無理數有無限多個，

例如 b、c 中點 $4+\dfrac{\sqrt{62}}{2}\neq\sqrt{63}$

(5)╳：b^2、c^2 之間的有理數有無限多個，

例如 $62.1\neq 63$

故選(3)。

3. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：雙重根號計算

解析：觀察 $(2+\sqrt{5})+(4-\sqrt{5})=6$

根據雙重根號公式

$\sqrt{(x+y)-2\sqrt{x\cdot y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\ (x\geq y\geq 0)$

所以題目的雙重根號中可令 $x=2+\sqrt{5}>y=4-\sqrt{5}$

即 $\sqrt{6-2\sqrt{3+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2+\sqrt{5}}-\sqrt{4-\sqrt{5}}$

故選(3)。

4. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式次數、因式、加法、乘法運算

解析：觀察可知 $\deg f(x)=3$ 且首項係數為 -2

〔方法 1〕

將 $x=0$，-1，1 代入 $f(x)$，得 $f(0)=f(-1)=f(1)=0$

〔方法 2〕

直接乘法展開

$f(x)=(4x^2+4)-(x^3+x^2-5x+3)-(x^3+3x^2+3x+1)$

$\quad=-2x^3+2x$

以上方法皆可得到 $f(x)=-2x(x+1)(x-1)$

故選(5)。

5. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數化簡運算

解析：(1) $2^{4^3}=2^{64}$

(2) $2^{3^4}=2^{81}$

(3) $3^{2^4}=3^{16}<4^{16}=2^{32}$

(4) $4^{2^3}=4^8=2^{16}$

(5) $4^{3^2}=4^9=2^{18}$

故選(2)。

6. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數圖形的頂點

解析：若 h 不在區間 $[b,a]$ 內

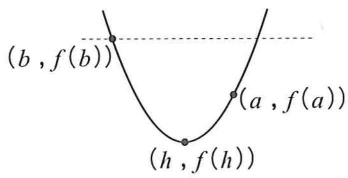
則端點的 y 坐標一定是最大、最小值，與題意矛盾

$\Rightarrow b<h<a$

又 $f(h)\neq f(a)<f(b)$，所以 $f(h)$ 為最小值

因此二次函數圖形開口朝上且 $f(b)>f(a)>f(h)$

如下圖所示



故選(3)。

7. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指對數結合生活素養運算

解析：根據計算公式可求出兩次地震的地震矩分別為

$M_{集}=10^{(7.7+10.73)\times\frac{3}{2}}$ 與 $M_{濃}=10^{(6.4+10.73)\times\frac{3}{2}}$

所以 $\dfrac{M_{集}}{M_{濃}}=10^{(7.7-6.4)\times\frac{3}{2}}$

$=10^{1.95}$

$=10\times10^{0.95}$

$\approx 10\times 9$

$=90$

故選(4)。

二、多選題

8. (1)(2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：解絕對值不等式

解析：若 $x\geq n$，去絕對值後 $x-n\geq 2x\Rightarrow x\leq -n$，與 $x\geq n$ 矛盾

若 $x<n$，去絕對值後 $-x+n\geq 2x\Rightarrow x\leq\dfrac{n}{3}$

故選(1)(2)。

〔另解〕

將選項逐一代入不等式檢驗

(1) ○：$|0-n|=n\geq 0$

(2) ○：$\left|\frac{n}{3}-n\right|=\frac{2n}{3}\geq\frac{2n}{3}$

(3) ╳：$\left|\frac{2n}{3}-n\right|=\frac{n}{3}<\frac{4n}{3}$

(4) ╳：$|n-n|=0<2n$

(5) ╳：$|2n-n|=n<4n$

故選(1)(2)。

9. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式減法、因式定理

解析：(1) ○：$6=\deg(f(x^2)-f(x))=\deg f(x^2)=2\deg f(x)$

$\Rightarrow \deg f(x)=3$

(2) ╳：$\deg g(x)=\deg f(x^2)=6$

(3) ╳：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow f(x^2)-f(x)=ax^6+bx^4-ax^3+(c-b)x^2-cx$

比較係數得 $a=4$，$b=-2$，$c=3$

所以 $f(x)=4x^3-2x^2+3x+d$，其中 d 為任意實數，故 $f(x)$ 的首項係數為 4

(4) ○：$f(x^2)$ 的係數和 $=f(1)=f(x)$ 的係數和

(5) ○：因為 $g(0)=g(1)=0$，

所以 $x(x-1)$ 為 $g(x)$ 的因式

故選(1)(4)(5)。

10. (1)(2)(3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：線段長度，中點，外接圓圓方程式

解析：三邊長分別為 $\overline{AB}=\sqrt{8}$ 、$\overline{BC}=\sqrt{40}$ 、$\overline{AC}=\sqrt{32}$

$\Rightarrow \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

所以△ABC 為直角三角形且斜邊為 $\overline{BC}$

可知 $\overline{BC}$ 為圓 Γ 的直徑

(1) ○：直線 AB 斜率為 $\frac{5-3}{0-2}=-1$

直線 AC 斜率為 $\frac{5-1}{0+4}=1$

兩斜率乘積 $=-1$

故 $\overline{AB}\perp\overline{AC}$

(2) ○：圓心為 $\overline{BC}$ 中點 $\left(\frac{2+(-4)}{2}\ ,\ \frac{3+1}{2}\right)=(-1\ ,2)$

(3) ○：半徑等於 $\frac{\overline{BC}}{2}=\sqrt{10}$

(4) ╳：原點 $(0\ ,0)$ 與圓心距離為 $\sqrt{5}<\sqrt{10}$

故原點 $(0\ ,0)$ 在圓 Γ 內部

(5) ╳：承(4)，原點 $(0\ ,0)$ 在圓 Γ 內部

所以圓 Γ 會通過四個象限

故選(1)(2)(3)。

11. (3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：畢氏定理、完全平方數

解析：因為 $a=(m-n)(m+n)$，所以 $m-n=1\Rightarrow m=n+1$，

將 a，b，c 皆以 n 表示如下：

$a=2n+1$，$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$

(1) ╳：$b+c=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

(2) ╳：$2b+1=(2n+1)^2$

(3) ○：$2c+1=4n^2+4n+3$ 介於 $(2n+1)^2$、$(2n+2)^2$ 連續完全平方數之間

(4) ╳：$2(a+b+1)=4n^2+8n+4=(2n+2)^2$

(5) ○：$2(a+c+1)=4n^2+8n+6$ 介於 $(2n+2)^2$、$(2n+3)^2$ 連續完全平方數之間

故選(3)(5)。

三、選填題

12. $\frac{29}{30}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：將循環小數化為分數

解析：因 $0.\overline{9}=\frac{9}{9}=1$、$0.0\overline{3}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$

所以 $x-y=\frac{29}{30}$ 。

13. 6

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：指數律化簡運算、根號計算

解析：注意 $\frac{10000}{10^{\sqrt{10}}}=10^{4-\sqrt{10}}$

原式可化簡為 $10^{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}=10^{(16-10)}\Rightarrow k=6$。

14. 10

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：轉換指數形式

解析：因 $2^{2023}\cdot 5^{2023}=10^{2023}=ab\cdot 10^{2022}$

其中 $1\leq a$，$b<10$

所以 $ab=10$。

15. 7

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：函數圖形與 x 軸交點位置坐標判斷

解析：令 $f(x)=0$，則 $x=-\sqrt{5}$ 或 1 或 $\frac{16}{3}$ ，

可知函數圖形與 x 軸只交於 $\left(\frac{16}{3}\ ,\ 0\right)$、$(1\ ,0)$、$(-\sqrt{5}\ ,0)$ 三點

所以滿足不等式的範圍為 $-\sqrt{5}<x<1$ 或 $1<x<\frac{16}{3}$

因 $-\sqrt{5}\approx-2.236$，$\frac{16}{3}\approx 5.3$

所以整數解為 -2，-1，0，2，3，4，5

共 7 個。

16. $y=7x+6$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的一次近似、圖形平移

解析：$y=g(x)$ 的圖形向右平移 2 個單位後所對應的函數為

$y=f(x)=(x-2)^3-5(x-2)+4=x^3-6x^2+7x+6$

所以 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的一次近似為

直線 $y=7x+6$。

17. 9

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式除法原理

解析：根據除法原理，甲生錯的計算過程為

$g(x)=a\cdot f(x)+(-2x^2-18)$

同除以 a 並移項可得到 $f(x)=\dfrac{1}{a}\cdot g(x)+\dfrac{2x^2+18}{a}$

即 $p=\dfrac{2}{a}$，$q=0$，$r=\dfrac{18}{a}$

所以 $q+\dfrac{r}{p}=0+\dfrac{18}{2}=9$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式

解析：直線的斜率為 m 且過點 $(-12,-9)$

所以方程式為 $y+9=m(x+12)$

故選(1)。

19. (1)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：半徑、半弦長求弦心距

解析：弦心距為 $\sqrt{10^2-(\sqrt{19})^2}=\sqrt{81}=9$

故選(1)。

20. $0\le t\le\dfrac{24}{7}$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：弦心距、點到直線距離、解二次方程式

解析：已知斜率為 t，設直線 M 的方程式為

$y+9=t(x+12)\Rightarrow tx-y+(12t-9)=0$

因弦心距等於圓心 $(0,0)$ 到直線 M 的距離

所以 $\dfrac{|12t-9|}{\sqrt{t^2+1}}\le 9$

兩邊平方後整理得 $9(t^2+1)\ge(4t-3)^2$

$\Rightarrow 7t^2-24t\le 0$

$\Rightarrow 0\le t\le\dfrac{24}{7}$。

◎評分原則

已知斜率為 t，設直線 M 的方程式為

$y+9=t(x+12)\Rightarrow tx-y+(12t-9)=0$ (1 分)

因弦心距等於圓心 $(0,0)$ 到直線 M 的距離 (1 分)

所以 $\dfrac{|12t-9|}{\sqrt{t^2+1}}\le 9$ (2 分)

兩邊平方後整理得 $9(t^2+1)\ge(4t-3)^2$

$\Rightarrow 7t^2-24t\le 0$ (1 分)

$\Rightarrow 0\le t\le\dfrac{24}{7}$。 (2 分)