全國公私立高級中學113學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：113年7月31日~8月1日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	12-3	12-4
4	3	3	1	2	135	45	145	35	25	23	1	1	3	4
13-1	13-2	13-3	14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3
－	1	2	9	3	9	1	6	－	6	3	0	2	8	3
18	19	20												
3														

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【知識點】實數與指對數

【解析】$61+2\sqrt{5}a=(b^2+5c^2)+2\sqrt{5}bc$

且 a，b，c 均為正整數 $\Rightarrow\begin{cases}b^2+5c^2=61\cdots①\\ a=bc\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$，

由①得 $(b,c)=(4,3)$ 代入②，得 $a=12$，

故選(4)。

2. 【知識點】多項式函數

【解析】

$f(x)=36(3x-1)^6-65(3x-1)^5-40(3x-1)^4+25(3x-1)^3$
$-44(3x-1)^2+19(3x-1)+1$，

設 $g(x)=36x^6-65x^5-40x^4+25x^3-44x^2+19x+1$，

$f(\frac{13}{12})=g(\frac{9}{4})=g(x)\div(x-\frac{9}{4})$ 的餘數為 $3\frac{1}{4}$，

故選(3)。

3. 【知識點】直線與圓

【解析】因為 $\angle APO=90^\circ$，$\overline{PB}=\overline{PC}$，

所以 P 點為以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓和 $\overline{BC}$ 中垂線的交點，

以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓為 $(x-\frac{5}{2})^2+y^2=(\frac{5}{2})^2$ 即 $x^2+y^2-5x=0$；

$\overline{BC}$ 中垂線為 $y=2x-6$，$P:\begin{cases}x^2+y^2-5x=0\\ y=2x-6\end{cases}$

$\Rightarrow P(x,y)=(4,2)$，$(\frac{9}{5},-\frac{12}{5})$（不合，因為 P 在第一象限）

$\Rightarrow m=4$，$n=2\Rightarrow m+2n=8$，

故選(3)。

4. 【知識點】直線與圓

【解析】點 $A(2,6)$ 在 $kx-y+k^2+2k+1>0$ 的半平面

$\Rightarrow 2k-6+k^2+2k+1>0\Rightarrow k>1$ 或 $k<-5\cdots①$

點 $B(4,1)$ 在 $kx-y+k^2+2k+1<0$ 的半平面

$\Rightarrow 4k-1+k^2+2k+1<0\Rightarrow -6<k<0\cdots②$

①且② $\Rightarrow -6<k<-5\Rightarrow \alpha+\beta=(-6)+(-5)=-11$，

故選(1)。

5. 【知識點】實數與指對數

【解析】因為 $\max\{|x-3|,|x+3|\}\le 15$

$\Rightarrow\begin{cases}|x+3|\le|x-3|\\ |x-3|\le 15\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|x-3|\le|x+3|\\ |x+3|\le 15\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(x+3)^2\le(x-3)^2\\ -15\le x-3\le 15\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x-3)^2\le(x+3)^2\\ -15\le x+3\le 15\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\le 0\\ -12\le x\le 18\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge 0\\ -18\le x\le 12\end{cases}$

$\Rightarrow -12\le x\le 0$ 或 $0\le x\le 12$

$\Rightarrow -12\le x\le 12\Rightarrow[-12,12]$

所求 $=12-(-12)=24$，

故選(2)。

二、多選題

6. 【知識點】實數與指對數

【解析】$a=(2^2)^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{6}}$，$b=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$，

$c=((\frac{1}{2})^2)^{\frac{1}{6}}=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{6}}$，$d=((\frac{1}{3})^3)^{\frac{1}{6}}=(\frac{1}{27})^{\frac{1}{6}}$。

(1) ○：$b>a>c>d$。

(2) ×：$1<a<b$。

(3) ○：因為 $\begin{cases}0<\frac{1}{4}<1\Rightarrow 0<(\frac{1}{4})^{\frac{1}{6}}<1\\ 0<\frac{1}{27}<1\Rightarrow 0<(\frac{1}{27})^{\frac{1}{6}}<1\end{cases}$，

所以 $0<d<c<1$。

(4) ×：因為 $ad=(\frac{4}{27})^{\frac{1}{6}}$，$bc=(\frac{27}{4})^{\frac{1}{6}}$，

所以 $ad<bc$。

(5) ○：$\begin{cases}ac=(4\times\frac{1}{4})^{\frac{1}{6}}=1\\ bd=(27\times\frac{1}{27})^{\frac{1}{6}}=1\end{cases}\Rightarrow ac+bd=2$。

故選(1)(3)(5)。

7. 【知識點】直線與圓

【解析】$d(O,L)<r<d(O,M)\Rightarrow\frac{26}{\sqrt{13}}<r<\frac{39}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow\sqrt{52}<r<\sqrt{117}\Rightarrow 7.\cdots<r<10.\cdots$，

故選(4)(5)。

8. 【知識點】直線與圓

【解析】$C_1:(x+3)^2+(y-3)^2=4$

$\Rightarrow O_1(-3,3)$，$r_1=2$。

$C_2:(x-4)^2+(y-6)^2=9$

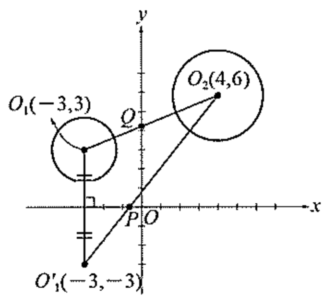
$\Rightarrow O_2(4,6)$，$r_2=3$。

$\overleftrightarrow{O_1'O_2}:9x-7y=-6$

$\Rightarrow P(\frac{-2}{3},0)$，

$\overleftrightarrow{O_1O_2}:3x-7y=-30$

$\Rightarrow Q(0,\frac{30}{7})$，



$d_1=\overline{O_1'O_2}-(r_1+r_2)=\sqrt{130}-5$，

$d_2=\overline{O_1O_2}-(r_1+r_2)=\sqrt{58}-5$，

又 $d_1+d_2=\sqrt{130}+\sqrt{58}-10>5$，

故選(1)(4)(5)。

9. 【知識點】多項式函數

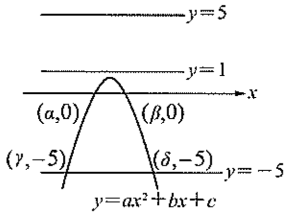
【解析】

(1) ×：$x(x-2024)<0\Rightarrow 0<x<2024$，
不等式的解不包含所有的正整數。

(2) ×：$(x+3)(x-1)>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-3$，
不等式的解不包含正整數 1。

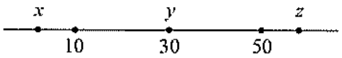
(3) ○：$x>\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ 或 $x<\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，其中 $0<\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}<1$，
故不等式的解包含所有的正整數。
(4) ×：$(x-3)^2>0$ 不等式的解不包含正整數 3。
(5) ○：x^2-5x+7 恆正，故不等式的解包含所有的正整數。
故選(3)(5)。

10. 【知識點】多項式函數
【解析】
(1) ×：$ax^2+bx+c>5$ 無解
$\Rightarrow y=ax^2+bx+c$ 的圖形在直線 $y=5$ 的下方（含相切）
$\Rightarrow a<0$。
(2) ○：$y=ax^2+bx+c$ 的圖形可能在直線 $y=1$ 的下方（含相切）
$\Rightarrow$ 不等式 $ax^2+bx+c>1$ 可能無解。
(3) ×：不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。
(4) × (5) ○：$\gamma<\alpha<\beta<\delta$。

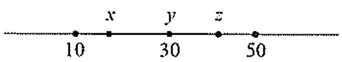


故選(2)(5)。

11. 【知識點】實數與指對數
【解析】$\sqrt{(x-10)^2}+\sqrt{(y-30)^2}+\sqrt{(z-50)^2}=5$
$\Rightarrow |x-10|+|y-30|+|z-50|=5$，
上式意表
(x 和 10 的距離)+(y 和 30 的距離)+(z 和 50 的距離)$=5$，
且 x 和 10 的距離 ≤ 5、y 和 30 的距離 ≤ 5、z 和 50 的距離 ≤ 5，
故 $x<y<z$。
$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{y^2-2yz+z^2}$
$=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(y-z)^2}$
$=|x-y|+|y-z|=$(x 和 z 的距離)。
設 $P=z-x$，
當 $x\le 10$，$y=30$，$z\ge 50$ 時，P 為最大 45，如圖(一)所示；
當 $x\ge 10$，$y=30$，$z\le 50$ 時，P 為最小 35，如圖(二)所示，



圖(一)



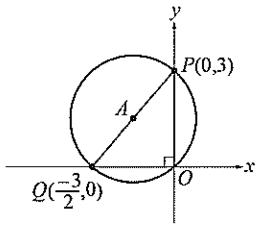
圖(二)

即 $35\le P\le 45$，
故選(2)(3)。

三、選填題

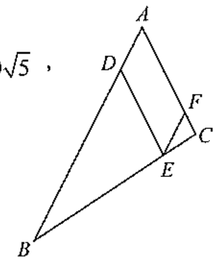
12. 【知識點】實數與指對數
【解析】$\dfrac{1}{\sqrt{3.5-\sqrt{8.25}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{2}-\sqrt{\dfrac{33}{4}}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{33}}{2}}}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-\sqrt{33}}}=\dfrac{2}{\sqrt{14-2\sqrt{33}}}$
$=\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$。

13. 【知識點】直線與圓
【解析】因為 $\overline{PQ}$ 為直徑



$\Rightarrow$ 圓心 $A(\dfrac{-3}{4},\dfrac{3}{2})$
$\Rightarrow m_{\overline{AP}}=\dfrac{3-\dfrac{3}{2}}{0-(\dfrac{-3}{4})}=2$
$\Rightarrow m_{切}=\dfrac{-1}{2}$。

14. 【知識點】直線與圓
【解析】$\overline{AD}:\overline{DE}=1:2$

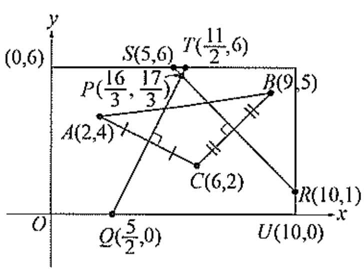


$\Rightarrow$ 設 $\overline{EF}=\overline{AD}=k$、$\overline{AF}=\overline{DE}=2k$，
$\overline{AC}=5\sqrt{5}$，$\overline{FC}=5\sqrt{5}-2k$，$\overline{AB}=10\sqrt{5}$，
$\dfrac{\overline{FC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\dfrac{5\sqrt{5}-2k}{k}=\dfrac{5\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}$
$\Rightarrow k=2\sqrt{5}$
$\Rightarrow \overline{AF}=4\sqrt{5}$，$\overline{FC}=\sqrt{5}$
$\Rightarrow \overline{BE}:\overline{EC}=\overline{AF}:\overline{FC}=4:1$，
$\Rightarrow E(m,n)=(\dfrac{48+(-3)}{4+1},\dfrac{20+(-5)}{4+1})=(9,3)$。

15. 【知識點】直線與圓
【解析】$m_{\overline{AC}}m_{\overline{CP}}=-1\Rightarrow\dfrac{m-1}{-4-0}\times\dfrac{3-1}{4-0}=-1\Rightarrow m=9$，
$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{CP}:\overline{DP}=\sqrt{20}:\sqrt{45}=2:3$
$\Rightarrow P(4,3)=(\dfrac{2n+(-12)}{2+3},\dfrac{2r+27}{2+3})\Rightarrow n=16$，$r=-6$
$\Rightarrow (m,n,r)=(9,16,-6)$。

16. 【知識點】直線與圓
【解析】$P(0,-1)\Rightarrow m_{\overline{AP}}=\dfrac{0+1}{-2-0}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m_{\overline{BP}}=2$
$\Rightarrow$ 直線 BP：$y=2x-1\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{5}{2}x-1\\ y=2x-1\end{cases}$
$\Rightarrow (x,y)=(0,-1),(3,5),(-3,-7)$
$\Rightarrow B$ 為 $(3,5)$ 或 $(-3,-7)$。
$\overline{AP}=\sqrt{5}$，$\overline{BP}=3\sqrt{5}$
$\Rightarrow$ 菱形 $ABCD$ 面積 $=4\triangle APB$ 面積 $=4(\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2})=30$。

17. 【知識點】直線與圓
【解析】



$\begin{cases}\overline{AC}\text{ 之中垂線 }\overleftrightarrow{PQ}：y=2x-5\\ \overline{BC}\text{ 之中垂線 }\overleftrightarrow{PR}：y=-x+11\end{cases}$
$\Rightarrow \triangle ABC$ 之外心 $P(\dfrac{16}{3},\dfrac{17}{3})$，
令 $y=0$ 代入 $y=2x-5\Rightarrow Q(\dfrac{5}{2},0)$，
令 $x=10$ 代入 $y=-x+11\Rightarrow R(10,1)$，
所求 $=\triangle PQU+\triangle PRU$
$=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{17}{3}\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{14}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{283}{12}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【知識點】多項式函數

【解析】$y=f(x)=(x-2)^3+p(x-2)+3$；

$y=h(x)=m(x-2)+3$

$\Rightarrow y=f(x)+h(x)=(x-2)^3+(p+m)(x-2)+6$，

中心$(2,6)$，

故選(3)。

19. 【知識點】多項式函數

【解析】$y=g(x)=k(x-2)^2+3$；$y=h(x)=m(x-2)+3$

$\Rightarrow y=g(x)+h(x)=k(x-2)^2+m(x-2)+6=k(x-3)^2+4$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{一次係數} -4k+m=-6k \\ \text{常數項} 4k-2m+6=9k+4 \end{cases}$（2分）

$\Rightarrow k=2$、$m=-4$。（2分）

20. 【知識點】多項式函數

【解析】$y=f(x)=(x-2)^3+p(x-2)+3$，

$y=g(x)=2(x-2)^2+3$，

$y=h(x)=-4(x-2)+3$

$\Rightarrow g(x)-h(x)=2(x-2)^2+4(x-2)=2x(x-2)$，（2分）

又$f(x)=(g(x)-h(x))q(x)+x+1$

即$(x-2)^3+p(x-2)+3=2x(x-2)q(x)+x+1$（2分）

$x=0$代入上式得$-8-2p+3=1 \Rightarrow p=-3$，（2分）

所求為$y=p(x-2)+3 \Rightarrow y=-3(x-2)+3$

$\Rightarrow y=-3x+9$。（2分）