全國公私立高級中學 114 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：114 年 7 月 30 日~31 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
1	5	5	4	2	3	25	23	25	14	13	14	1	8	2
14-1	14-2	15-1	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3	18	19	20				
3	7	9	4	5	2	5	6	3						

第壹部分、選擇（填）題

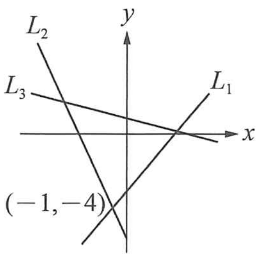
一、單選題

1. 【測驗目標】絕對值
【解析】以 x 與 1 的大小關係分類討論：
(1) 若 $x\geq 1$，則原式 $(x-1)+2x=17$，解得 $x=6$
(2) 若 $x<1$，則原式 $(-x+1)+2x=17$，解得 $x=16$（不合）
$\therefore |x-1|+2x=17$ 恰有一實數解
故選(1)。

2. 【測驗目標】指數
【解析】因為 $4\div 0.5=8=2^3$，
所以每 100 年 B 會比 A 多經歷 3 次半衰期，
因此西元 2200 年時 A 的質量為 B 的 $4\times 8=32$ 倍，
西元 2300 年時 A 的質量為 B 的 $32\times 8=256$ 倍，
故選(5)。

3. 【測驗目標】圓與直線的關係
【解析】令圓 C 的圓心為 $O(0,0)$
$\Rightarrow$ 點 O 到直線 L 的距離為 $\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$，
若圓 C 上恰有兩點與直線 L 的距離為 1，
則 $2-1<\sqrt{3+m}<2+1$，解得 $-2<m<6$
$\Rightarrow$ 滿足條件的整數 m 有 7 個，
故選(5)。

4. 【測驗目標】直線方程式的應用（二元一次不等式）
【解析】$\because$ 三直線僅 L_1 的斜率為正值
$\therefore L_1：x-y=d$
又 $ax+y=1$ 的 y 截距為 1
$\therefore L_3：ax+y=1$
又 $L_2：bx+cy=2$ 的 x 截距為 $\dfrac{2}{b}<0$
$\therefore b<0$
$\Rightarrow x-y>d$ 表直線 L_1 的右半平面
$bx+cy>2$ 表直線 L_2 的左半平面
$ax+y<1$ 表直線 L_3 的下半平面，
故選(4)。



5. 【測驗目標】多項式函數及其圖形
【解析】若 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=2$ 附近的一次近似為直線 Γ，
則直線 Γ 通過點 $A(2,6)$ 與 $B(2.002,6.030)$，
因此直線 Γ 的斜率為 15。
若 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=-2$ 附近的一次近似為直線 Λ，
則由三次函數的對稱性可知直線 Λ 的斜率亦為 15。
$y=f(x)$ 的對稱中心為 $C(0,8)$，且通過 $A(2,6)$，
由對稱性可知 $y=f(x)$ 通過點 $C(-2,10)$，
因此直線 Λ 的方程式為 $y=15(x+2)+10$，
$f(-2.001)\approx 9.985$。
故選(2)。

6. 【測驗目標】絕對值
【解析】$|7x-50|<a\Leftrightarrow |x-\dfrac{50}{7}|<\dfrac{a}{7}$，
將所有整數依照與 $\dfrac{50}{7}$ 的距離從近到遠排列，
依序為 7、8、6、9、5、10、…，
因此 $|7x-50|<a$ 的 5 個整數解為 7、8、6、9、5。
因為 $x=5$ 代入 $|7x-50|<a$ 成立，所以 $a>15$。
因為 $x=10$ 代入 $|7x-50|<a$ 不成立，
即代入 $|7x-50|\geq a$ 成立，所以 $a\leq 20$。
綜合以上兩者可得 $15<a\leq 20$，
故選(3)。

二、多選題

7. 【測驗目標】直線方程式及其圖形
【解析】$\because L_1$ 通過 $(0,4)$ 且斜率為 2
$\therefore L_1$ 與 x 軸交於 $(-2,0)$
設 L_2 交 x 軸於 $(a,0)$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot|a-(-2)|\cdot 4=10$，即 $|a+2|=5$，
解得 $a=3$ 或 -7
$\therefore L_2$ 的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{4}{7}$
故選(2)(5)。

8. 【測驗目標】多項式不等式
【解析】
(1) ×：$f(2)=8a-16-14+1=3$，解得 $a=4$。
(2) ○：$f(x)-3=4x^3-4x^2-7x-2=(x-2)(2x+1)^2$。
(3) ○：$f(-1)=-4-4+7+1=0$。
(4) ×：$\because f(x)=(x+1)(4x^2-8x+1)$
$=4(x+1)(x-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2})(x-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2})$
$\therefore f(x)<0$ 的解為 $x<-1$ 或 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow$ 滿足 $f(x)<0$ 的最大整數 x 為 1。
(5) ×：$\because f(x)>0$ 的解為 $-1<x<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x>\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow$ 滿足 $f(x)>0$ 的最小整數 x 為 0。
故選(2)(3)。

9. 【測驗目標】多項式函數及其圖形
【解析】
(1) ×：以點 $A(1,10)$ 代入 $y=ax^2+b$ 可得 $a+b=10$。
(2) ○：$ax^2+b=-8x\Leftrightarrow ax^2+8x+b=0$ 有唯一解，
因此 $8^2-4ab=0\Rightarrow ab=16$。
(3) ×：以 $b=\dfrac{16}{a}$ 代入 $a+b=10$ 可得 $a+\dfrac{16}{a}=10$
$\Rightarrow a^2-10a+16=0\Rightarrow (a-2)(a-8)=0$
$\Rightarrow a=2$ 或 8，因此 $(a,b)=(2,8)$ 或 $(8,2)$。
(4) × (5) ○：若 $(a,b)=(2,8)$，
$ax^2+8x+b=0$ 為 $2x^2+8x+8=0$，唯一解為 $x=-2$，
代入 $y=-8x$ 可得 B 點坐標為 $(-2,16)$。
若 $(a,b)=(8,2)$，則 $ax^2+8x+b=0$ 為
$8x^2+8x+2=0$，唯一解 $x=-\dfrac{1}{2}$，
代入 $y=-8x$ 可得 B 點坐標 $(-\dfrac{1}{2},4)$。
故選(2)(5)。

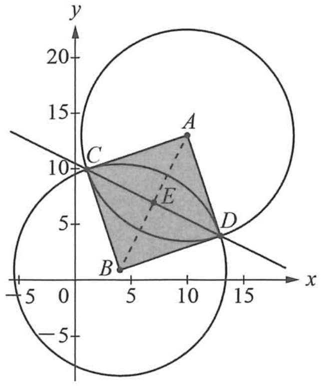
10. 【測驗目標】直線方程式的應用、圓方程式

【解析】

(1) ○：如圖，A 點坐標為 $(10,13)$，

$\overline{AE}$ 為 A 點到 $\overline{CD}$ 的距離 $\dfrac{|10+26-21|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3\sqrt{5}$，

因為 $ABCD$ 為正方形，$\overline{CD}=\overline{AB}=2\overline{AE}=6\sqrt{5}$。



(2) ×：因為 $\overline{AC}:\overline{AE}=\sqrt{2}:1$，

所以圓 Ω 半徑 $\overline{AC}=3\sqrt{10}$，$k=\overline{AC}^2=90$。

(3) ×：直線 AB 垂直直線 CD：$x+2y=21$，

且通過點 $A(10,13)$，因此方程式為 $2x-y=7$。

(4) ○：$\begin{cases} x+2y=21 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Rightarrow E$ 點坐標 $(7,7)$。

(5) ×：$\dfrac{A+B}{2}=E \Rightarrow B=2E-A=(4,1)$，

半徑亦為 $3\sqrt{10}$，因此圓 Λ 的方程式為

$(x-4)^2+(y-1)^2=90$。

故選(1)(4)。

11. 【測驗目標】圓方程式

【解析】由題敘可知，P 點落在圓 C_1 與圓 C_2 的交點，

其中 $C_1:(x-2)^2+(y-1)^2=5$，$C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=5$，

兩式相減，得 $2x+6y=20$，解得 $(x,y)=(1,3)$ 或 $(4,2)$

$\Rightarrow \overline{PC}=2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$，

故選(1)(3)。

12. 【測驗目標】直線方程式及其圖形

【解析】每個選項中 A 點可能的位置如右圖所標示的點。

(1) ○：有 2 個解。

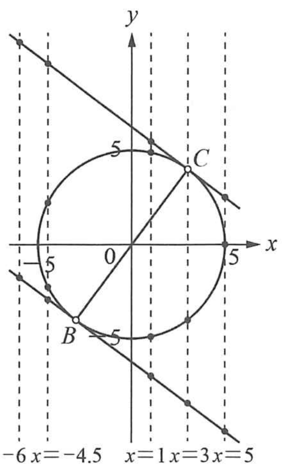
(2) ×：有 4 個解。

(3) ×：有 4 個解。

(4) ○：有 2 個解。

(5) ×：有 3 個解。

故選(1)(4)。



三、選填題

13. 【測驗目標】實數

【解析】$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$。

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$。

$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$。

因此 $a(1+\sqrt{2})+b(3-\sqrt{2})=24+16\sqrt{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+3b=24 \\ a-b=16 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(18,2)$。

14. 【測驗目標】多項式的運算與應用

【解析】令 $f(x)=(x^3+2x^2+4x-7)g(x)+2x^2+5x+3$，

因此 $f(1)=10$。

令 $f(x)=(x^3+5x^2+6x+2)h(x)+5x^2+2x+1$，

因此 $f(-1)=4$。

令 $f(x)=(x^2-1)k(x)+ax+b$，

因為 $\begin{cases} f(1)=a+b=10 \\ f(-1)=-a+b=4 \end{cases}$，

所以 $(a,b)=(3,7)$。

15. 【測驗目標】常用對數

【解析】$\because \dfrac{x}{y^2}=10^{2.54-2\times(1.21)}=10^{0.12}$

$\therefore 9\le 0.12\times n<10 \Rightarrow 75\le n<83.\cdots$

故滿足條件的正整數 n 有 9 個。

16. 【測驗目標】實數

【解析】令 $\overline{BC}=x$，$\overline{CD}=y$，因此 $xy=48$，

施工費用為 $3[x+(x-1)]+2y=6x+2y-3$（千元），

由算幾不等式可知 $\dfrac{6x+2y}{2}\ge\sqrt{6x\times 2y}=\sqrt{12\times 48}=24$

$\Rightarrow 6x+2y-3\ge 45$，

施工費用最低需要 45 千元。

等號成立時 $6x=2y$，因此 $x=4$，$y=12$。

17. 【測驗目標】直線方程式的應用

【解析】設 $B(\alpha,0)$，$C(0,\beta)$

$\because \overline{BD}\perp\overline{CD}$

$\therefore \dfrac{0-1}{\alpha-3}\cdot\dfrac{\beta-1}{0-3}=-1$，化簡得 $3\alpha+\beta=10$

由算幾不等式，得 $\dfrac{3\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{3\alpha\cdot\beta} \Rightarrow 5\ge\sqrt{3\alpha\beta}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\alpha\beta\le\dfrac{25}{6}$

當 $3\alpha=\beta=5$ 時，$\dfrac{1}{2}\alpha\beta$ 有最大值為 $\dfrac{25}{6}$，

故 $\triangle ABC$ 面積的最大值為 $\dfrac{25}{6}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】多項式函數的運算與應用

【解析】

$v(1.5)=3\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})\cdot 15+3\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot 45+(\frac{1}{2})^3\cdot 60=30$，

故選(3)。

19. 【測驗目標】多項式函數的運算與應用

【解析】

$$v(x)=3(1-\frac{x}{3})^2(\frac{x}{3})15+3(1-\frac{x}{3})(\frac{x}{3})^2 45+(\frac{x}{3})^3 60\ (1\text{ 分})$$

$$=15x(1-\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{9})+15x^2(1-\frac{x}{3})+\frac{20x^3}{9}\ (2\text{ 分})$$

$$=-\frac{10}{9}x^3+5x^2+15x。(2\text{ 分})$$

20. 【測驗目標】多項式函數的圖形

【解析】$\because$ 對稱中心的 x 坐標 $=\dfrac{-5}{3\times(\frac{-10}{9})}=\dfrac{3}{2}$（2 分）

將 $v(x)$ 寫成 $(x-\frac{3}{2})$ 的多項式，

得 $v(x)=-\dfrac{10}{9}(x-\dfrac{3}{2})^3+\dfrac{45}{2}(x-\dfrac{3}{2})+30$（3 分）

故 $v(x)$ 在 $x=1.5$ 處的一次近似直線為

$y=\dfrac{45}{2}x-\dfrac{15}{4}$。（2 分）