數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(3)	(4)	(2)	(5)	(1)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(2)(4)	(3)(5)	(1)(3)(4)	(2)(5)	(1)(2)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值不等式及解的區間表示

解析：不等式 $3\leq |x+a|<5$

$\Rightarrow -5<x+a\leq -3$ 或 $3\leq x+a<5$

$\Rightarrow -a-5<x\leq -a-3$ 或 $-a+3\leq x<-a+5$

用區間表示為 $(-a-5,-a-3]$ 或 $[-a+3,-a+5)$

$\Rightarrow -a+3=-4$

$\Rightarrow a=7$

則另一個區間為 $(-12,-10]$

故選(1)。

2. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：分數指數的定義及指數律的應用

解析：$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$c=\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow a=2^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$b=3^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$c=6^{\frac{1}{6}}$

因此 $c<a<b$

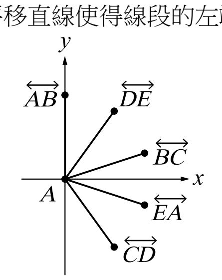
故選(4)。

3. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的斜率

解析：如下圖，平移直線使得線段的左端點與原點重合



其中 $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率不存在，其餘由上至下，斜率愈來愈小

因此，$\overleftrightarrow{CD}$ 的斜率最小

故選(3)。

4. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用分點公式計算線段的長度

解析：因為 B 是 A，D 的內分點且 $\overline{AB}:\overline{BD}=1:2$

由分點公式可知 $b=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}d$

同理可得，$c=\dfrac{2}{5}a+\dfrac{3}{5}d$

因為 $\overline{BC}=|b-c|=\dfrac{4}{15}|a-d|=\dfrac{4}{15}\overline{AD}$

所以 $\overline{AD}=\dfrac{15}{4}\overline{BC}=15$

故選(4)。

5. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能正確使用除法原理求餘式

解析：由除法原理知 $f(x)=g(x)x+x$

當 $f(x)$ 除以 x 時，$f(x)=x(g(x)+1)+0$

因此餘式為 0

故選(2)。

6. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩平行直線的距離

解析：若兩條平行直線為水平線或是鉛垂線，則距離皆為 5

所以不可能為水平線或是鉛垂線

因此可假設兩直線為 $y=mx+k_1$ 及 $y=mx+k_2$ 且分別通過 $(6,4)$ 及 $(11,9)$，其中 m 為非零實數，k_1，k_2 為實數且 $k_1\neq k_2$

$\Rightarrow \begin{cases}4=6m+k_1\\9=11m+k_2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}k_1=4-6m\\k_2=9-11m\end{cases}$

兩平行直線的距離為 $\dfrac{|k_1-k_2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{|(4-6m)-(9-11m)|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1$

$\Rightarrow 12m^2-25m+12=0$

$\Rightarrow (3m-4)(4m-3)=0$

$\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}$

故選(5)。

二、多選題

7. (1)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：對數與科學記號及雙重根號拆解

解析：(1) ○：$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\times 3}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}$

$=2+\sqrt{3}$

$\approx 2+1.732$

$=3.732$

$\log a$ 的整數部分為 3

(2) ╳：承(1)，小數部分為 $2+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}-1$

(3) ╳：$\log a=2+\sqrt{3}\approx 3.732$

$\Rightarrow a\approx 10^{0.732}\times 10^3$，其中 $1\leq 10^{0.732}<10$

$\Rightarrow a$ 的整數部分為 4 位數

(4) ╳：承(1)，$\log a=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=10^{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a^2=10^{4+2\sqrt{3}}\approx 10^{7.464}$

$\Rightarrow \log a^2=4+2\sqrt{3}\approx 7.464$

(5) ○：承(4)，a^2 的整數部分為 8 位數

故選(1)(5)。

8. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：高次不等式

解析：$(x^3+1)(x^2-2)<x(x^3+1)$

$\Rightarrow (x^3+1)(x^2-2)-x(x^3+1)<0$

$\Rightarrow (x^3+1)(x^2-x-2)<0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)(x+1)(x-2)<0$

$\Rightarrow (x+1)^2(x^2-x+1)(x-2)<0$

又 x^2-x+1 首項係數為 $1>0$

且判別式 $(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

所以 x^2-x+1 恆正

x	$(\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
x^2-x+1	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	−	0	+

故選(1)(2)(4)。

9. (3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次不等式的解區域判斷

解析：$(x+1)^2-(y-2)^2=0$

$\Rightarrow (x+y-1)(x-y+3)=0$

$\Rightarrow (x+1)^2-(y-2)^2=0$ 的圖形為兩直線

令 $L_1：x+y-1=0$，$L_2：x-y+3=0$

因為 $0+0-1<0$，$0-0+3>0$

所以原點 $(0,0)$ 在 L_1 左側且在 L_2 右側

(1) ╳：代入 $L_1：1+2-1=2>0$

代入 $L_2：1-2+3=2>0$

$(1,2)$ 在 L_1 右側且在 L_2 右側

(2) ╳：代入 $L_1：0+2-1=1>0$

代入 $L_2：0-2+3=1>0$

$(0,2)$ 在 L_1 右側且在 L_2 右側

(3) ○：代入 $L_1：(-1)+1-1=-1<0$

代入 $L_2：(-1)-1+3=1>0$

$(-1,1)$ 在 L_1 左側且在 L_2 右側

(4) ╳：代入 $L_1：(-2)+2-1=-1<0$

代入 $L_2：(-2)-2+3=-1<0$

$(-2,2)$ 在 L_1 左側且在 L_2 左側

(5) ○：代入 $L_1：(-2)+0-1=-3<0$

代入 $L_2：(-2)-0+3=1>0$

$(-2,0)$ 在 L_1 左側且在 L_2 右側

故選(3)(5)。

10. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形的對稱中心及一次近似

解析：(1) ○：$f(-0.999)=(-0.999+1)^3-3(-0.999+1)^2+1$

$=(0.001)^3-3(0.001)^2+1\approx 0.99$

四捨五入至整數為 1

(2) ╳：$f(x)=(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^2+2x+1)+1$

$=x^3-3x-1$

對稱中心為 $(0,-1)$

(3) ○：承(2)，向上平移 1 單位後得

$y=x^3-3x=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

與 x 軸交於 $(0,0)$，$(\sqrt{3},0)$，$(-\sqrt{3},0)$ 三點

(4) ○：承(2)，連續利用綜合除法可得

$f(x)=x^3-3x-1=(x-1)^3+3(x-1)^2-3$

(5) ╳：承(4)，

$y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=-3$

故選(1)(3)(4)。

11. (2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的特徵

解析：(1) ╳：若 $f(x)=2x^2$，則 $g(x)=x^2+x+2$，與 $g(x)$ 為一次多項式矛盾

(2) ○：若 $g(x)=2x$，則 $f(x)=x^2+x-2$，符合條件

(3) ╳：因為 $f(x)=g(x)+x^2-x-2$，又 $g(x)$ 為一次多項式

所以 $f(x)$ 的首項係數為正，因此圖形為開口向上的拋物線

(4) ╳：若 (p,q) 為 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 兩圖形的交點，

則 $f(p)-g(p)=0$

$\Rightarrow p$ 為 $x^2-x-2=0$ 的解

反之，若 p 為 $x^2-x-2=0$ 的解，則 $f(p)=g(p)$

$\Rightarrow (p,f(p))$ 為兩圖形的交點

因為 $x^2-x-2=0$ 有解，所以兩圖形必有交點

(5) ○：令 $g(x)=ax+b$

$\Rightarrow f(x)=x^2+(a-1)x+(b-2)$

若 $y=f(x)$ 的圖形恆在 x 軸上方，

則 $(a-1)^2-4(b-2)<0$

取 $a=1$，$b=3$ 即可

故選(2)(5)。

12. (1)(2)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能利用中垂線、切線、弦心距的特性解題

解析：(1) ○：小半圓的直徑 AB 為大半圓的弦且大半圓圓心為 $(0,0)$

又弦的中垂線必過圓心 $O(0,0)$

因此線段 AB 的中垂線必過原點

(2) ○：承(1)，$\overline{AB}$ 的中垂線過 $(0,0)$ 且與 $\overline{AB}$ 垂直

$\Rightarrow \overline{AB}$ 的中垂線為 $y=-2x$

所以小半圓圓心（$\overline{AB}$ 中點）落在直線 $y=-2x$ 上

(3) ╳：$L：y=\dfrac{1}{2}x+k\Rightarrow x-2y+2k=0$

原點 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離為

$\dfrac{|0-2\times0+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2|k|}{\sqrt{5}}$

(4) ╳：設小半圓半徑為 $r\Rightarrow \overline{O'P}=r$

$\Rightarrow O'$ 的 y 坐標為 r

由(2)的結果可設 $O'\left(\dfrac{-r}{2},r\right)$

$\Rightarrow \overline{OO'}^2=\left(\dfrac{-r}{2}\right)^2+r^2=\dfrac{5r^2}{4}$

又△$OO'B$ 是一直角三角形，則 $\overline{OO'}^2+r^2=2^2$

$\Rightarrow \dfrac{5r^2}{4}+r^2=4$

$\Rightarrow r=\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$ (不合)

(5) ╳：承(3)、(4)，

$$\overline{OO'}^2=\left(\frac{2|k|}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4k^2}{5}=\frac{5r^2}{4}=\frac{5}{4}\times\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$$

$\Rightarrow k=\dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{5}{3}$ (不合)

故選(1)(2)。

三、選填題

13. 19

出處：第一冊〈數與式〉

目標：乘法公式與根式有理化

解析：因為 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

又 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=4$

所以 $x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=16-2+4+1$

$=19$。

14. $5\sqrt{5}$

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：熟悉指數律及根式的表達

解析：$a^6=b^3=5$

$\Rightarrow a=5^{\frac{1}{6}}$，$b=5^{\frac{1}{3}}$

$(a^{\sqrt{3}}\times b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=[(ab)^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{3}}=\left[(5^{\frac{1}{6}}\times 5^{\frac{1}{3}})^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$

$=(5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}})^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=(5^{\frac{1}{2}})^3=5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}$。

15. (2 , 1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的四則運算

解析：

$$\begin{array}{r|cccccccc}
 & ax & - & 1 & & & & & \\ \hline
x^2+x+3 & ax^3 & + & b & x^2 & + & 5 & x- & 3 \\
 & ax^3 & + & a & x^2 & + & 3a & x & \\ \hline
 & & & (b-a) & x^2 & + & (5-3a) & x- & 3 \\
 & & & - & x^2 & - & & x- & 3 \\ \hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

則 $\begin{cases} b-a=-1 \\ 5-3a=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

故數對 $(a\ ,b)=(2\ ,1)$。

16. 14

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理及連續綜合除法的應用

解析：由餘式定理知 $f(11)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-11)$ 的餘式

又連續利用綜合除法可得

$f(x)=(x-11)^3+2(x-11)^2+(x-11)+(1100+a)$

$\Rightarrow f(11)=1100+a=10$

故 $f(12)=(12-11)^3+2(12-11)^2+(12-11)+(1100+a)$

$=1+2+1+(1100+a)$

$=14$。

17. $2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：$x^2+y^2-4kx+2ky+5k^2-2k-2=0$

$\Rightarrow (x^2-4kx+4k^2)+(y^2+2ky+k^2)$

$=-5k^2+2k+2+4k^2+k^2=2k+2$

$\Rightarrow (x-2k)^2+(y+k)^2=(\sqrt{2k+2}\,)^2$

為圓心在 $(2k\ ,-k)$，半徑為 $\sqrt{2k+2}$ 的圓

$\Rightarrow k=3$

故圓的半徑為 $\sqrt{2\times3+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的圖形

解析：因為最高點為 (0 , 4)

所以可假設軌跡滿足 $y=ax^2+4$

又因為軌跡從 (−2 , 0) 出發

所以代入後得 $0=4a+4$

$\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow$ 軌跡方程式為 $y=-x^2+4$

①將 $x=-1$ 代入可得 $-(-1)^2+4=3$

選項(3)合

②將 $x=1$ 代入可得 $-(1)^2+4=3$

選項(5)合

故選(3)(5)。

19. $\dfrac{-x^2-1}{x-2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：斜率

解析：球的軌跡為 $y=-x^2+4$

$\Rightarrow P$ 點為 $(x\ ,-x^2+4)$

故連線段斜率為 $\dfrac{-x^2+4-5}{x-2}=\dfrac{-x^2-1}{x-2}$。

◎評分原則

球的軌跡為 $y=-x^2+4$

$\Rightarrow P$ 點為 $(x\ ,-x^2+4)$　(2 分)

故連線段斜率為 $\dfrac{-x^2+4-5}{x-2}=\dfrac{-x^2-1}{x-2}$。　(2 分)

20. $-4+2\sqrt{5}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

解析：令 $t=2-x \Rightarrow x=2-t$

斜率為 $\dfrac{-x^2-1}{x-2}=\dfrac{x^2+1}{2-x}=\dfrac{(2-t)^2+1}{t}=\dfrac{t^2-4t+5}{t}$

$=-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$

由算幾不等式得 $\dfrac{t+\frac{5}{t}}{2}\geq\sqrt{t\times\dfrac{5}{t}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$

斜率為 $-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)\geq -4+2\sqrt{5}$

故斜率的最小值為 $-4+2\sqrt{5}$ 。

◎評分原則

令 $t=2-x \Rightarrow x=2-t$

斜率為 $\dfrac{-x^2-1}{x-2}=\dfrac{x^2+1}{2-x}=\dfrac{(2-t)^2+1}{t}=\dfrac{t^2-4t+5}{t}$

$=-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$ (2 分)

由算幾不等式得 $\dfrac{t+\frac{5}{t}}{2}\geq\sqrt{t\times\dfrac{5}{t}}=\sqrt{5}$ (3 分)

$\Rightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$

斜率為 $-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)\geq -4+2\sqrt{5}$

故斜率的最小值為 $-4+2\sqrt{5}$ 。 (1 分)