數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(3)	(1)	(2)	(3)	(5)	(2)	(1)(5)	(2)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(1)(2)(3)(5)	(1)(4)	(1)(2)(3)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數函數的單調性

解析：$1<x<4 \Rightarrow 2+\sqrt{2}<2^x+2^{\frac{1}{2}}<16+\sqrt{2} \Rightarrow 3.41\cdots\cdots<2^x+2^{\frac{1}{2}}<17.41\cdots\cdots$

其中是整數的有 4，5，6，……，17，共 14 個

故選(4)。

2. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數運算的性質

解析：$\log 3 \times \log 5 \times \log 7$ 與 $\log_9 3 \times \log_9 5 \times \log_9 7$ 皆小於 1

$\log 3+\log 5+\log 7<\log_9 3+\log_9 5+\log_9 7$

又 $\log_9 3+\log_9 5+\log_9 7=\log_9(3\times5\times7)=\log_9 105>\log_9 81=2$

故 $\log_9 3+\log_9 5+\log_9 7$ 最大

故選(3)。

3. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：複數運算與多項式方程式

解析：設 $z=a+bi$，

由 $z-2\bar{z}=1+6i \Rightarrow (a+bi)-2(a-bi)=1+6i \Rightarrow -a+3bi=1+6i \Rightarrow a=-1$，$b=2 \Rightarrow z=-1+2i$

又選項都是實係數方程式，虛根成對

以 $-1+2i$、$-1-2i$ 為兩根的二次方程式為 $[x-(-1+2i)][x-(-1-2i)]=0$

乘開得 $x^2+2x+5=0$

故選(1)。

4. (2)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：二次函數極值、指數函數遞增遞減性質

解析：$-2x^2+2x+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

在 $-1\le x\le 1$ 的條件下，$-2x^2+2x+1$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 時有最大值 $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow (0.5)^{-2x^2+2x+1}$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 時有最小值 $(0.5)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

故選(2)。

5. (3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式除法的應用

解析：令 $g(x)=[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=x^2-4x+1$，則 $g(2+\sqrt{3})=0$

利用長除法求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式與商式，得 $f(x)=(4x-5)g(x)+12x-10$

$\Rightarrow f(2+\sqrt{3})=0+12(2+\sqrt{3})-10=14+12\sqrt{3}$

故選(3)。

6. (5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的圖形

解析：$f(x)=ax^2-4ax+3=a(x-2)^2+3-4a$，對稱軸為 $x=2$

又由 $\overline{AB}=6$，可知函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$、$(5,0)$

$\Rightarrow f(-1)=a+4a+3=0$，故 $a=-\dfrac{3}{5}$

故選(5)。

7. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數表的應用

解析：設 $a=1.27^{20}$，

則 $\log a=20\log 1.27=20\times 0.1038=2.076=2+0.076\approx 2+\log 1.19=\log 119$

故選(2)。

二、多選題

8. (1)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：數線上兩點的距離、有理數與無理數

解析：設 P 的坐標為 x，則

$a+b=|x-2|+|x-4|$ ……………①

$a-b=|x-2|-|x-4|$ ……………②

(1)○：$x=1.5$ 時，$a+b$ 就等於 3

(2)╳：若 $2<x<4\Rightarrow a-b<2$

若 $x<2\Rightarrow a-b=-2$

若 $x>4\Rightarrow a-b=2$

(3)╳：例如 $x=4\sqrt{2}$ 時，$a+b=4\sqrt{2}-2+4\sqrt{2}-4=8\sqrt{2}-6$ 是無理數

(4)╳：例如 $x=2\sqrt{2}$ 時，$a-b=(2\sqrt{2}-2)-(4-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}-6$ 是無理數

(5)○：若 a 是有理數 $\Rightarrow |x-2|$ 是有理數 $\Rightarrow x$ 是有理數 $\Rightarrow b=|x-4|$ 是有理數

故選(1)(5)。

9. (2)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數函數圖形、多項方程式實根的判別

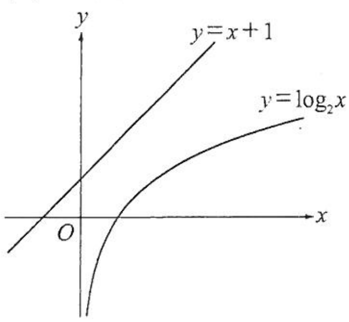
解析：(1)╳：如圖(一)，$y=\log_2 x$ 與 $y=x+1$ 不相交

(2)○：如圖(二)，$y=2^x$ 與 $y=x+1$ 有兩個交點，$(0,1)$ 與 $(1,2)$

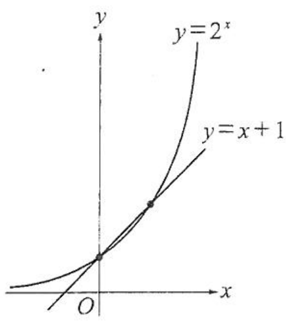
(3)╳：如圖(三)，$y=2^{-x}$ 與 $y=x^2$ 有三個交點

(4)○：$x^4-x^2-1=0\Rightarrow x^2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，取正值時可得兩個實根

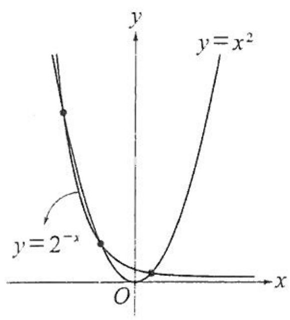
(5)╳：三次實係數方程式可能有三個實根或一個實根



圖(一)



圖(二)



圖(三)

故選(2)(4)。

10. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：實係數多項方程式虛根成對

解析：由虛根成對定理，$2+i$、$2-i$ 都是 $f(x)=0$ 的解

$\Rightarrow [x-(2+i)][x-(2-i)]=x^2-4x+5$ 是 $f(x)$ 的因式

設 $f(x)=(x-\alpha)(x^2-4x+5)$，$\alpha$ 是 $f(x)=0$ 的解

$\Rightarrow x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x^2-4x+5)$

$\Rightarrow c=-5\alpha$，因為 c 為有理數，所以 α 為有理數

故選(1)(2)(3)(5)。

11. (1)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：除法原理

解析：設 $f(x)=(x+a)(x^2+x-2)+3x+3$

$\qquad=(x+b)(x^2-x+1)+6x-5$

展開比較兩式 $\Rightarrow a=2$、$b=4 \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2+3x-1$

(1) ○：$f(1)=1+3+3-1=6$

(2) ╳：$f(-1)=-1+3-3-1=-2$

(3) ╳：$f(0)=-1<0$

(4) ○：$x^3+3x^2+3x-1=0 \Rightarrow (x+1)^3=2$ 恰有一個實根 $-1+\sqrt[3]{2}$

(5) ╳：$f(x)=3x^2 \Rightarrow x^3+3x^2+3x-1=3x^2 \Rightarrow x^3+3x-1=0$

令 $g(x)=x^3+3x-1$

因為當 $x<0$ 時 $\Rightarrow g(x)<0$，所以 $g(x)=0$ 沒有負實根

故選(1)(4)。

12. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數函數圖形

解析：$f(x)=\dfrac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\dfrac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{5^{2x}+1}$

(1) ○：$f(x)=0 \Rightarrow 5^{2x}=1 \Rightarrow x=0$

(2) ○：$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5^{-1}-1}{5^{-1}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{5}-1}{\dfrac{1}{5}+1}=-\dfrac{2}{3}$

(3) ○：$5^{2a}+1>1 \Rightarrow 0<\dfrac{1}{5^{2a}+1}<1 \Rightarrow 0<\dfrac{2}{5^{2a}+1}<2 \Rightarrow -1<1-\dfrac{2}{5^{2a}+1}<1 \Rightarrow -1<f(a)<1$

(4) ○：$f(-x)=\dfrac{5^{-x}-5^x}{5^{-x}+5^x}=-\dfrac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=-f(x) \Rightarrow f(x)$ 的圖形對稱於原點

(5) ○：若 $x_1<x_2 \Rightarrow 1<5^{2x_1}+1<5^{2x_2}+1 \Rightarrow \dfrac{2}{5^{2x_1}+1}>\dfrac{2}{5^{2x_2}+1} \Rightarrow 1-\dfrac{2}{5^{2x_1}+1}<1-\dfrac{2}{5^{2x_2}+1}$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 是遞增函數

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 8

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：乘法公式、雙重根號化簡

解析：設 $a=\sqrt{19+k\sqrt{3}}+\sqrt{19-k\sqrt{3}}$，

則 $a^2=19+k\sqrt{3}+19-k\sqrt{3}+2\sqrt{(19+k\sqrt{3})(19-k\sqrt{3})}=38+2\sqrt{361-3k^2}$，

因 a^2 是正整數 $\Rightarrow 361-3k^2$ 是完全平方數

又 $361-3k^2\geq 0 \Rightarrow k$ 可能值為 1，2，3，……，10

代入檢查，只有 $k=8$ 符合所求。

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$；-12

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數運算、算幾不等式

解析：由 $0<x<1 \Rightarrow \log_2 x<0$、$\log_x 2<0$

因為 $(\log_2 x)(\log_x 2)=1$，由算幾不等式

得 $(-4\log_2 x)+(-9\log_x 2) \geq 2\sqrt{(-4\log_2 x)(-9\log_x 2)}$

$\Rightarrow -y \geq 12$，即 $y \leq -12$

等號成立時 $-4\log_2 x=-9\log_x 2$

$\Rightarrow 4\log_2 x=\frac{9}{\log_2 x}$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2=\frac{9}{4}$

又 $\log_2 x<0$，得 $\log_2 x=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

故 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$b=-12$。

C. 4；$\frac{26}{5}$

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式

解析：分成三種情形討論：

(1) $x \leq -\frac{9}{2}$ 時，原式 $\Rightarrow -(2x+9)-3(x-5) \leq 20 \Rightarrow x \geq -\frac{14}{5} \Rightarrow$ 無解

(2) $-\frac{9}{2}<x<5$ 時，原式 $\Rightarrow (2x+9)-3(x-5) \leq 20 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow 4 \leq x<5$

(3) $x \geq 5$ 時，原式 $\Rightarrow (2x+9)+3(x-5) \leq 20 \Rightarrow x \leq \frac{26}{5} \Rightarrow 5 \leq x \leq \frac{26}{5}$

由(1)(2)(3) $\Rightarrow 4 \leq x \leq \frac{26}{5}$。

D. 2；27

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數首數法則

解析：6^n 是 11 位數 $\Rightarrow \log 6^n$ 首數是 $10 \Rightarrow 10 \leq \log 6^n<11$

$\Rightarrow 10 \leq n\log 6<11 \Rightarrow 10 \leq n(\log 2+\log 3)<11$

$\Rightarrow 10 \leq n(0.301+0.4771)<11 \Rightarrow \frac{10}{0.7781} \leq n<\frac{11}{0.7781} \Rightarrow 12.85 \leq n<14.14$

$\Rightarrow n=13$，14

故有 2 個解，總和 $13+14=27$。

E. $2\sqrt{2}$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的極值

解析：$a+b=\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$

$a^2+b^2=a^2+(6-a)^2=2(a-3)^2+18 \geq 18$

$\Rightarrow a=3$ 時，a^2+b^2 有最小值 18

設 $\overline{AP}=x$，則 $\overline{PQ}=\frac{3}{4}x$

由 $\triangle APQ$ 的面積為 $3 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{3}{4}x=3 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$。

F. 7.4

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數、對數的應用問題

解析：$r=\log a+b\log E$ ……………(#)

規模 6.4 與 6.7 的地震，其能量大小分別相當 2 顆與 5 顆原子彈

$E=2$、5 代入(#)

$\Rightarrow 6.4=\log a+b\log 2$ ……………①

$6.7=\log a+b\log 5$ ……………②

設能量大小相當 40 顆原子彈的地震，其芮氏地震規模為 x，則

$x=\log a+b\log 40$ ……………③

②－①$\Rightarrow 0.3=b\log\frac{5}{2}$ ……………④

③－①$\Rightarrow x-6.4=b\log 20$ ………⑤

⑤÷④$\Rightarrow \dfrac{x-6.4}{0.3}=\dfrac{\log 20}{\log\frac{5}{2}}\Rightarrow x-6.4=0.3\times\dfrac{1+\log 2}{1-2\log 2}=0.3\times\dfrac{1.301}{0.398}\approx 0.9806$

$\Rightarrow x\approx 7.3806\approx 7.4$。

G. -8

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次方程式根的判別、根與係數關係

解析：$x^2-(k+3)x+4k=0$ 有兩個實根 $\Rightarrow (k+3)^2-4\cdot 4k\geq 0\Rightarrow k\leq 1$ 或 $k\geq 9$

由根與係數關係：$\alpha+\beta=k+3$、$\alpha\beta=4k$

又 $\alpha^2+\beta^2=17\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=17\Rightarrow(k+3)^2-2\times 4k=17\Rightarrow k=-2$ 或 $k=4$

但是 $k\leq 1$ 或 $k\geq 9$，所以 $k=-2$，而 $\alpha\beta=4k=-8$。

H. $\frac{5}{2}$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式恆等性質、整係數一次因式檢驗法

解析：由 $f(1)=f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=3$，假設 $f(x)=a(x-1)(x+1)(2x-1)+3$

又 $f(4)=-12\Rightarrow a(4-1)(4+1)(8-1)+3=-12\Rightarrow a=-\frac{1}{7}$

得 $f(x)=-\frac{1}{7}(x-1)(x+1)(2x-1)+3=0\Rightarrow(x-1)(x+1)(2x-1)=21$

$\Rightarrow 2x^3-x^2-2x-20=0\Rightarrow(2x-5)(x^2+2x+4)=0\Rightarrow\alpha=\frac{5}{2}$。