

全國公立私立高中第一次模擬考(文昌版)

第壹部分：選擇題



一、單選題：(30分)

1. 設 a, b 為正整數，且 $1 \leq ab \leq 32$ 。若 $\log_2 \frac{b}{a}$ 為有理數，則這種有理數共有幾個？
(其中 $\log_2 2$ 與 $\log_2 \frac{4}{2}$ 為同值，只算一個，且 $\log_2 3, \log_2 \frac{2}{3}, \log_2 5, \dots$ 皆不是有理數)
(1) 8 個 (2) 9 個 (3) 10 個 (4) 11 個 (5) 12 個
2. 已知 $\sqrt{10 - \sqrt{84}} + \sqrt{a} = \sqrt{b}$ ，其中 a, b 皆為正整數，則 $a + b$ 之值為何？
(1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14
3. 滿足不等式 $\frac{(x+2)^{2019}(x+3)^{2020}}{(x-6)^{2021}} \leq 0$ 的整數解共有多少個？
(1) 7 個 (2) 8 個 (3) 9 個 (4) 10 個 (5) 11 個
4. 已知 $a = \frac{\pi + 2 \log 2000}{3}$ ， $b = \frac{3\pi + \log 2000}{4}$ ， $c = \frac{7\pi - \log 2000}{6}$ ，則 a, b, c 的大小關係為何？
(1) $a > c > b$ (2) $b > a > c$ (3) $b > c > a$ (4) $c > b > a$ (5) $a > b > c$
5. 小明最近在複習指數問題，他發現函數 $f(x) = \frac{3 - 2^{x+3}}{3 + 2^x}$ 有一個現象，無論 x 為任何實數，函數 $f(x)$ 不會超過 10，也不會小於 -10。則下列哪一個選項可能是 $f(x)$ 的函數值？
(1) π (2) $\sqrt{2}$ (3) $2^{\sqrt{3}}$ (4) $\log_{2019} 108$ (5) $\log_{108} 2019$
6. 音量的強度通常以分貝為單位表示，分貝(S)與聲音強度(I)的計算公式為 $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$ ，其中 I_0 是人耳可聽到的最小聲音強度 $10^{-12} (\frac{W}{m^2})$ 。警報器是消防安檢的重要設備之一，設某警報器其音量強度為 90 分貝，如果五個同款警報器一起發聲，則測出來的音量強度最接近下列何值？
(1) 97 分貝 (2) 99 分貝 (3) 150 分貝 (4) 225 分貝 (5) 450 分貝

二、多選題：(35分)

7. 以 $x^2 + 2x - 8$ 除多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 分別得餘式為 $3x + 1, 2x - 5$ ，試選出正確的選項。
(1) $f(0) = 1$ (2) $2f(x) + 3g(x)$ 被 $x - 2$ 除的餘式為 11
(3) $xf(x) + 2g(x)$ 被 $x - 1$ 除的餘式為 -2 (4) $f(x) + g(x)$ 被 $x^2 + 2x - 8$ 除的餘式為 $5x - 4$
(5) $x^2 f(x) + xg(x)$ 被 $x^2 + 2x - 8$ 除的餘式為 $25x - 24$
8. 試選出正確的選項。
(1) 方程式 $|x + 3| + |x - 5| = 10$ 的解為 -4 或 6 (2) 方程式 $|2x - 5| + |x + 2| = 4$ 無解
(3) 不等式 $|x - 4| \geq |3x - 6|$ 的解為 $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ (4) 不等式 $|x + 2| + |x - 3| \leq 7$ 的解為 $-2 \leq x \leq 3$
(5) 不等式 $|3x - 5| \leq 2x$ 的解為 $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$
9. 已知 a, b, c, d 皆為有理數， r, s 皆為無理數。試選出正確的選項。
(1) 若 $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ，則 $a = c, b = d$ (2) 若 $r + s$ 為有理數，則 rs 為有理數
(3) $a + br$ 為無理數
(4) 若 $r \neq s$ ，則 r 與 s 之間存在無限多個有理數，也存在無限多個無理數
(5) 若 $x \in \mathbb{R}$ ，且 x^{2019} 與 x^{10} 皆為有理數，則 x 為有理數

10. 下列有關多項式的敘述，試選出正確的選項。

- (1) 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 為整係數多項式，若 $ax - b$ 為 $f(x)$ 的一次因式，則 a 為 a_n 的因數且 b 為 a_0 的因數
- (2) 設 $f(x)$ 為整係數多項式，若 $f(x)$ 可被一次整係數多項式 $ax + b$ 整除，則其商式亦為整係數多項式
- (3) 設 $f(x)$ 為有理係數多項式，且 $f(a + \sqrt{b}) = 0$ ，則 $f(a - \sqrt{b}) = 0$
- (4) 設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $f(2 + i) = 0$ ，則 $f(2 - i) = 0$
- (5) 設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 Z 為虛數，若 $f(x)$ 可被 $x - Z$ 整除，則 $f(x)$ 亦可被 $(x - Z)(x - \bar{Z})$ 整除 (\bar{Z} 為 Z 的共軛複數)

11. 下列有關指數函數與對數函數的圖形描述，試選出正確的選項。

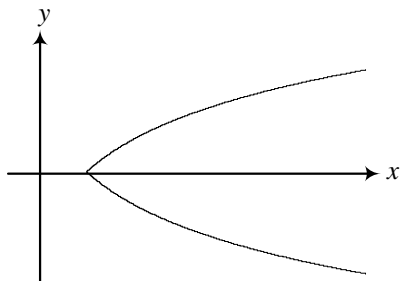


圖1

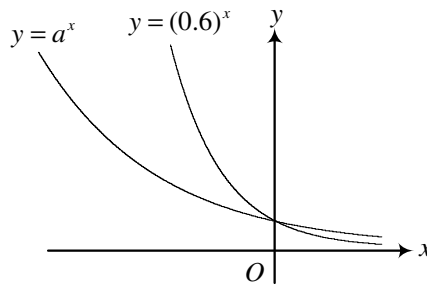


圖2

- (1) 在坐標平面上， $y = \log_3 \frac{1}{x}$ 的圖形與 $y = \log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸
- (2) $y = \log_a |x|$ ($a > 1$) 的圖形可以為圖1
- (3) 在坐標平面上， $y = \log 3x$ 的圖形經過平移後可與 $y = \log 5x$ 的圖形重合
- (4) 作 $y = (1.2)^x$ 與 $y = x$ 兩函數的圖形，可知方程式 $(1.2)^x - x = 0$ 沒有實根
- (5) 如圖2，其中底數 a 之值比 0.6 小

12. 設 $a = \left(\frac{4}{5}\right)^{100} = k \times 10^n$ ，其中 n 為整數，且 $1 < k < 10$ ，試選出正確的選項。

- (1) $n = -10$
- (2) $\log a$ 的首數為 -9
- (3) $\log a$ 的尾數為 0.3
- (4) a 乘開後自小數點後算起連續出現 9 個 0
- (5) $2 < k < 3$

13. 下列有關指數與對數的運算，試選出正確的選項。

- (1) 若 $2a \neq b$ ，則 $3^{\frac{2a+b}{2}} > \frac{1}{2}(3^{2a} + 3^b)$
- (2) $2^{100} > 10^{31}$
- (3) $\log_8 27 = \log_2 3$

- (4) $(\log_3 4)(\log_5 6) = (\log_3 6)(\log_5 4)$
- (5) 設 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，則 $5^{\log_a b} = b^{\log_a 25}$

三、選填題：(35 分)

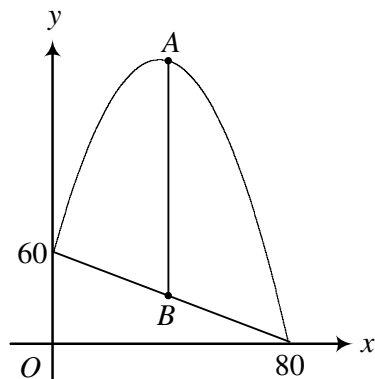
A. 設 x, y 為實數，且 $3x + y = 4$ ，則 $(0.125)^x + (0.5)^y$ 的最小值為_____。(化為最簡分數)

B. 有一項實驗結果發現細菌數每經過 1 日後會增加為原來的 x 倍，經過 3 日後會增加為原來的 y 倍，經過 5 日後會增加為原來的 $3x + 2y$ 倍。由此可推得細菌數每經過 1 日後會增加為原來的_____倍。

C. 設 $(x^2 + x + 2)^{10} = a_{20}x^{20} + a_{19}x^{19} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，則

$$a_{20} - a_{18} + a_{16} - \dots - a_6 + a_4 - a_2 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

- D. 某甲站在高度 60 公尺的斜坡上，如圖中坐標 $(0, 60)$ 處，向空中發射一枚煙火彈，以拋物線 $y = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{17}{4}x + 60$ 的軌跡掉落，正好落在山腳下，如圖中坐標 $(80, 0)$ 的位置。在煙火彈掉落過程中，煙火彈與斜坡的鉛垂線段(即 \overline{AB}) 的最大值為_____。



- E. 設 x 為實數，已知方程式 $x^2 + 5x - 13x + 6 = a$ 有 4 個相異實數解，若 a 的範圍為 $r < a < s$ ，則數對 $(r, s) =$ _____。
- F. 設 $f(x)$ 為整係數多項式，且 $f(-1 + \sqrt{2}) = 2 + 5\sqrt{2}$ ，若 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2x - 1$ 的餘式為 $ax + b$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

- G. 2003 年科學家發現蒂加登星(Teegarden's Star)，其為一顆年齡至少有 80 億歲的恆星，這代表圍繞著蒂加登星的行星可能有足夠的時間進化出高等生命。科學家們並於 2019 年 6 月確認有 2 顆相當類似地球的行星在蒂加登星身邊繞行，成功列入「適居太陽系外行星目錄」。已知蒂加登星的視星等為 15.4、絕對星等為 17.47，而星等換算公式為 $M = m + 5 \log_{10} \frac{d_0}{d}$ (M 為絕對星等， m 為視星等， d_0 約為 32.616 光年， d 為與觀察者的距離)。則由查表與內插法可得此蒂加登星距離我們約為_____光年。(四捨五入至小數第二位)(已知 $\log 32.616 \approx 1.5134$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732

RA192

全國公立高中第一次模擬考(文昌版)

選擇題：1. (4) 2. (1) 3. (3) 4. (5) 5. (4) 6. (1) 7. (2)(4)(5) 8. (1)(2)(3) 9. (1)(4)(5)
10. (4)(5) 11. (1)(3) 12. (1)(3)(4) 13. (3)(4)(5)

選填題：A. $\frac{1}{2}$ B. 3 C. -1024 D. 100 E. (-7, -6) F. (5, 7) G. 12.57