108 年學科能力測驗第一次模擬考試

數學考科解析

108-W1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(1)	(3)	(5)	(4)	(1)	(2)(4)(5)	(1)(2)(3)	(1)(4)(5)	(4)(5)	(1)(3)	(1)(3)(4)	(3)(4)(5)	1	2
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3	−	1	0	2	4	1	0	0	−	7	−	6	5	7
31	32	33	34											
1	2	5	7											

第壹部分

一、單選題

1. (4) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第一章 數與式；第三章 指數、對數函數

【解析】∵ 滿足 $\frac{b}{a}=2^k$，且 $1\le ab\le 32$ 即為所求

$\Rightarrow \frac{b}{a}=1，2，4，8，16，32，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\frac{1}{16}，\frac{1}{32}$

∴ 共 11 個

故選(4)

2. (1) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】$\because \sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\times 3}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{10-\sqrt{84}}+\sqrt{3}=\sqrt{7}$

$\Rightarrow a=3，b=7 \quad \therefore a+b=10$

故選(1)

3. (3) 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】∵ 原不等式 $=\frac{(x+2)^{2018}(x+2)(x+3)^{2020}}{(x-6)^{2020}(x-6)}\le 0$

$\because (x+2)^{2018}\ge 0，(x+3)^{2020}\ge 0，(x-6)^{2020}\ge 0$

∴ 原不等式相當於 $\frac{x+2}{x-6}\le 0$ 或 $x=-3$

$\Rightarrow (x+2)(x-6)\le 0，x\ne 6$ 或 $x=-3$

$\therefore -2\le x<6$ 或 $x=-3$

$\Rightarrow x=-3，-2，-1，0，1，2，3，4，5$ 共 9 個

故選(3)

4. (5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】$\because a=\frac{1}{3}\pi+\frac{2}{3}\log 2000，b=\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\log 2000$

$\because \frac{2}{3}>\frac{1}{4}$ ∴ 由內分點公式知：$a>b$

$\because c=\frac{6+1}{6}\pi-\frac{1}{6}\log 2000 \Rightarrow (\pi-c):(\log 2000-\pi)=1:6$

∴ 由外分點公式知：$c<b$

$\therefore a>b>c$

故選(5)

5. (4) 【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】$\because f(x)=\frac{3-2^{x+3}}{3+2^x}\Rightarrow (3+2^x)f(x)=3-8\cdot 2^x$

$\therefore 2^x=\frac{3[1-f(x)]}{f(x)+8}$

$\because 2^x>0\Rightarrow \frac{3[1-f(x)]}{f(x)+8}>0\Rightarrow [f(x)+8][f(x)-1]<0$

$\therefore -8<f(x)<1$

$\because 0<\log_{2019}108<1$

故選(4)

6. (1) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】$\because 90=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow \log\frac{I}{I_0}=9$

$\therefore 10\log\frac{5I}{I_0}=10(\log 5+\log\frac{I}{I_0})=10(\log\frac{10}{2}+\log\frac{I}{I_0})$

$=10(1-\log 2+9)$

$\approx 10(1-0.3010+9)\approx 97$

故選(1)

二、多選題

7. (2)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】(1)× $\because f(x)=(x^2+2x-8)q(x)+3x+1$

$=(x+4)(x-2)q(x)+3x+1$

$\therefore f(0)\ne 3\cdot 0+1=1$

(2)○ $\because \begin{cases} f(x)=(x+4)(x-2)q_1(x)+3x+1 \\ g(x)=(x+4)(x-2)q_2(x)+2x-5 \end{cases}$

∴ 餘式 $=2f(2)+3g(2)=2(6+1)+3(4-5)=11$

(3)× 承(2)知：$f(1)\ne 3+1=4，g(1)\ne 2-5=-3$

∴ 餘式 $\ne f(1)+2g(1)=4+2(-3)=-2$

(4)○ 承(2)知：

$f(x)+g(x)=(x+4)(x-2)[q_1(x)+q_2(x)]+5x-4$

(5)○ 承(2)知：

$x^2f(x)+xg(x)=(x+4)(x-2)[x^2q_1(x)+xq_2(x)]$
$+x^2(3x+1)+x(2x-5)$

$\because x^2(3x+1)+x(2x-5)$

$=3x^3+3x^2-5x=(x^2+2x-8)(3x-3)+25x-24$

∴ 餘式 $=25x-24$

故選(2)(4)(5)

8. (1)(2)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】(1)○ 若 $x>5\Rightarrow x+3+x-5=10\Rightarrow 2x-2=10\Rightarrow x=6$

若 $-3<x\le 5\Rightarrow x+3-x+5=10\Rightarrow 8=10$（不合）

若 $x\le -3\Rightarrow -x-3-x+5=10\Rightarrow -2x+2=10\Rightarrow x=-4$

得 $x=-4，6$

(2)○ 若 $x>\frac{5}{2}\Rightarrow 2x-5+x+2=4\Rightarrow 3x-3=4\Rightarrow x=\frac{7}{3}$（不合）

若 $-2<x\le\frac{5}{2}\Rightarrow -2x+5+x+2=4\Rightarrow -x+7=4$

$\Rightarrow x=3$（不合）

若 $x\le -2\Rightarrow -2x+5-x-2=4\Rightarrow -3x+3=4$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$（不合）

得 $|2x-5|+|x+2|=4$ 無解

(3)○ 若 $x>4\Rightarrow x-4\ge 3x-6\Rightarrow 2\ge 2x\Rightarrow 1\ge x$（不合）

若 $2<x\le 4\Rightarrow -x+4\ge 3x-6\Rightarrow 10\ge 4x\Rightarrow \frac{5}{2}\ge x$

$\Rightarrow 2<x\le\frac{5}{2}$

若 $x\le 2\Rightarrow -x+4\ge -3x+6\Rightarrow 2x\ge 2\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow 1\le x\le 2$

得 $1\le x\le\frac{5}{2}$

(4)× 若 $x>3\Rightarrow x+2+x-3\le 7\Rightarrow 2x-1\le 7\Rightarrow x\le 4$

$\Rightarrow 3<x\le 4$

若 $-2<x\le 3\Rightarrow x+2-x+3\le 7\Rightarrow 5\le 7$（恆成立）

若 $x\le -2\Rightarrow -x-2-x+3\le 7\Rightarrow -2x+1\le 7\Rightarrow x\ge -3$

$\Rightarrow -3\le x\le -2$

得 $-3\le x\le 4$

(5)× $\because |3x-5|\ge 0\Rightarrow 2x\ge 0$

若 $x\ge\frac{5}{3}\Rightarrow 3x-5\le 2x\Rightarrow x\le 5 \quad \therefore \frac{5}{3}\le x\le 5$

若 $x\le\frac{5}{3}\Rightarrow -(3x-5)\le 2x\Rightarrow x\ge 1 \quad \therefore 1\le x\le\frac{5}{3}$

$\therefore 1\le x\le 5$

故選(1)(2)(3)

9. (1)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】(1)○ $\because (a-c)+(b-d)\sqrt{3}=0 \quad \therefore a=c$，$b=d$

(2)✕ 不一定，設$r=\sqrt[3]{2}$、$s=-\sqrt[3]{2}$，則$r+s=0$為有理數，但$rs=-\sqrt[3]{4}$為無理數

(3)✕ 不一定，取$b=0$，則是有理數

(4)○ 有理數與無理數皆具有稠密性

(5)○ $\because x^{2019}$與x^{10}均為有理數，則$x=\dfrac{(x^{10})^{202}}{x^{2019}}$為有理數

故選(1)(4)(5)

10. (4)(5) 【難易度】★★★

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】(1)✕ 必須a與b互質才會成立

(2)✕ 不一定，例如：

$f(x)=x^3+2x^2-6x-4=(2x-4)(\frac{1}{2}x^2+2x+1)$

其中商式$\frac{1}{2}x^2+2x+1$不是整係數

(3)✕ 必須a與b為有理數，且$\sqrt{b}$為無理數才會成立

(4)○ 實係數方程式的共軛複數根成雙

(5)○ 根據實係數的共軛複數根成雙：$x=Z$與$x=\overline{Z}$均為$f(x)=0$的根

$\therefore (x-Z)(x-\overline{Z})$亦可整除$f(x)$

故選(4)(5)

11. (1)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】(1)○ $\because y=\log_3\frac{1}{x}=-\log_3 x$

$\therefore y=\log_3\frac{1}{x}$與$y=\log_3 x$的圖形對稱於$x$軸

(2)✕ $\because y=|\log_a x|\geq 0 \quad \therefore$ 圖形非圖 1

(3)○ $\because y=\log 3x=\log x+\log 3$，$y=\log 5x=\log x+\log 5$

$\therefore$ 圖形可上下平移而重合

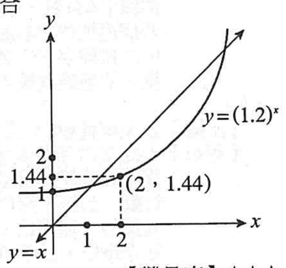
(4)✕ 如右圖：

$y=(1.2)^x$與$y=x$兩圖形會相交

$\therefore$ 方程式有實根

(5)✕ $\because$ 底數在 0 與 1 之間的指數函數圖形，底數越小圖形越靠近y軸

$\therefore a>0.6$



故選(1)(3)

12. (1)(3)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】(1)○ $\because \log(\frac{4}{5})^{100}=\log(\frac{8}{10})^{100}=100(\log 8-\log 10)$

$=100(3\log 2-1)$

$\approx 100(3\times 0.3010-1)=-9.7=-10+0.3$

(2)✕ 承(1)知：$\log a$的首數為 -10

(3)○ 承(1)知：$\log a$的尾數為 0.3

(4)○ 承(1)知：a自小數點後第 10 位開始出現不為 0 的數

$\therefore$ 自小數點後算起連續出現 9 個 0

(5)✕ $\because \log 1<0.3<\log 2 \Rightarrow k$的首位數字為 1 $\quad \therefore 1<k<2$

故選(1)(3)(4)

13. (3)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】(1)✕ 根據算幾不等式：$\dfrac{3^{2a}+3^b}{2}>\sqrt{3^{2a}\cdot 3^b}=3^{\frac{2a+b}{2}}$

$\therefore 3^{\frac{2a+b}{2}}<\frac{1}{2}(3^{2a}+3^b)$

(2)✕ $\because \begin{cases}\log 2^{100}=100\log 2\approx 100\times 0.3010=30.1\\ \log 10^{31}=31\end{cases}$

(3)○ $\log_8 27=\log_{2^3}3^3=\frac{3}{3}\log_2 3=\log_2 3$

(4)○ $\because (\log_3 4)(\log_5 6)=\dfrac{\log 4}{\log 3}\cdot\dfrac{\log 6}{\log 5}$

$(\log_3 6)(\log_5 4)=\dfrac{\log 6}{\log 3}\cdot\dfrac{\log 4}{\log 5}$

$\therefore (\log_3 4)(\log_5 6)=(\log_3 6)(\log_5 4)$

(5)○ $\because \log_a(5^{\log_a b})=(\log_a b)(\log_a 5)$

$\because \log_a(b^{\log_{a^2}25})=\log_a(b^{\frac{2}{2}\log_a 5})=\log_a(b^{\log_a 5})$

$=(\log_a 5)(\log_a b)$

$\therefore 5^{\log_a b}=b^{\log_{a^2}25}$

故選(3)(4)(5)

第貳部分：選填題

A. $\frac{1}{2}$ 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式；第三章 指數、對數函數

【解析】$\because \dfrac{(0.125)^x+(0.5)^y}{2}\geq\sqrt{(0.125)^x\cdot(0.5)^y}=\sqrt{(0.5)^{3x}\cdot(0.5)^y}$

$=\sqrt{(0.5)^{3x+y}}=\sqrt{(0.5)^4}=0.25$

$\Rightarrow (0.125)^x+(0.5)^y\geq 0.5=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 最小值$=\frac{1}{2}$

B. 3 【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】設一開始細菌數為N_0

$\Rightarrow t$日後的細菌數為$x^t N_0$或$y^{\frac{t}{5}}N_0$或$(3x+2y)^{\frac{t}{5}}N_0$

$\because$ 5 日後的細菌數為$x^5N_0=y^{\frac{5}{3}}N_0=(3x+2y)^{\frac{5}{5}}N_0$

設$x^5=y^{\frac{5}{3}}=(3x+2y)^{\frac{5}{5}}=r \Rightarrow x=r^{\frac{1}{5}}$，$y=r^{\frac{3}{5}}$，$3x+2y=r$

$\Rightarrow 3r^{\frac{1}{5}}+2r^{\frac{3}{5}}=r$

設$r^{\frac{1}{5}}=k \Rightarrow 3k+2k^3=k^5 \Rightarrow k(k^4-2k^2-3)=0$

$\Rightarrow k(k^2-3)(k^2+1)=0 \Rightarrow k=\sqrt{3}$

$\therefore x=r^{\frac{1}{5}}=k=\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 1 日後的細菌數為$x^1N_0=\sqrt{3}N_0$

$\therefore$ 每經過 1 日後會增加為原來的$\sqrt{3}$倍

C. -1024 【難易度】★★★

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】令$x=i$代入

$\Rightarrow (i^2+i+2)^{10}=a_{20}i^{20}+a_{19}i^{19}+a_{18}i^{18}+\cdots+a_2i^2+a_1i+a_0$

$=a_{20}-a_{19}i-a_{18}+\cdots-a_2+a_1i+a_0$

$\because (i^2+i+2)^{10}=(-1+i+2)^{10}=(1+i)^{10}=[(1+i)^2]^5=(2i)^5=32i$

$\therefore 32i=a_{20}-a_{19}i-a_{18}+\cdots-a_2+a_1i+a_0$

$\Rightarrow a_{20}-a_{18}+a_{16}-+\cdots-a_6+a_4-a_2+a_0=$ 實部 $=0$

$\because a_0=$ 常數項 $=(0+0+2)^{10}=1024$

$\therefore a_{20}-a_{18}+a_{16}-+\cdots-a_6+a_4-a_2=-a_0=-1024$

D. 100 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】$\because$ 斜坡所在的直線方程式為$\dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{60}=1 \Rightarrow 3x+4y=240$

$\Rightarrow y=60-\frac{3}{4}x$

$\because \overline{AB}=-\frac{1}{16}x^2+\frac{17}{4}x+60-(60-\frac{3}{4}x)=-\frac{1}{16}x^2+5x$

$=-\frac{1}{16}(x-40)^2+100$

$\therefore \overline{AB}$的最大值 $=100$

E. $(-7，-6)$ 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】設$\begin{cases}y=f(x)=x^2+5x-|3x+6|\\ y=a\end{cases}$

(1) $x\leq -2$時，

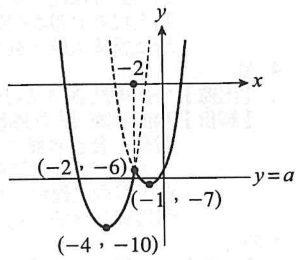
$y=f(x)=x^2+5x+(3x+6)$

$=(x+4)^2-10$

(2) $x\geq -2$時，

$y=f(x)=x^2+5x-(3x+6)$

$=(x+1)^2-7$



由(1)，(2)之討論作得如右圖所示圖形

$\therefore -7<a<-6$時，有 4 個相異實數解（4 個交點）

$\therefore (r，s)=(-7，-6)$

F. $(5，7)$ 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】$\because x^2+2x-1=0$的根為$-1\pm\sqrt{2}$

設$f(x)=(x^2+2x-1)q(x)+ax+b$

$\Rightarrow f(-1+\sqrt{2})=a(-1+\sqrt{2})+b=2+5\sqrt{2}$

$\Rightarrow -a+b=2$，$a=5 \Rightarrow b=7$

$\therefore (a，b)=(5，7)$

G. 12.57 【難易度】★★★

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】$17.47=15.4+5\log\dfrac{d_0}{d}=15.4+5(\log d_0-\log d)$

$\Rightarrow 2.07\approx 5(\log 32.616-\log d)$

$\Rightarrow 0.414\approx 1.5134-\log d$

$\Rightarrow \log d=1.0994=1+0.0994$（設$\log x=0.0994$）

利用內插法列式

$\dfrac{x-1.25}{1.26-1.25}=\dfrac{0.0994-0.0969}{0.1004-0.0969} \Rightarrow \dfrac{x-1.25}{0.01}=\dfrac{0.0025}{0.0035}$

$\Rightarrow 0.25=35(x-1.25) \Rightarrow x-1.25\approx 0.0071 \Rightarrow x\approx 1.2571$

代回可得$\log d=1+0.0994\approx 1+\log 1.2571$

$=\log 10+\log 1.2571=\log(10\times 1.2571)$

$=\log 12.571\approx\log 12.57$

$\therefore d\doteq 12.57$