全國公私立高級中學 109 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

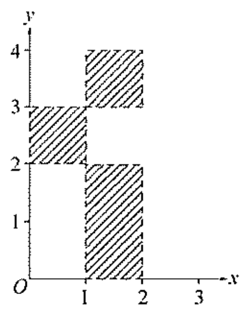
考試日期：109 年 8 月 5~6 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	2	3	1	3	2	23	35	24	234	13	1345	4	5	3
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	1	2	—	4	5	—	4	4	1	2	—	3	2	1
31	32													
2	3													

第壹部分：選擇題

一、單選題

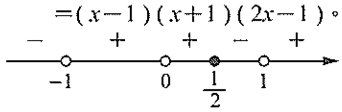
1. (1) ×：$\sqrt{-3}\times\sqrt{-7}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{7}\,i=\sqrt{21}\,i^2=-\sqrt{21}$ 。
   (2) ×：$-\sqrt{-3}\times\sqrt{-7}=-(-\sqrt{21})=\sqrt{21}$ 。
   (3) ×：因 $\sqrt{\dfrac{7}{-3}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}\,i$ ，
   又 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{i}{i^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}i=-\sqrt{\dfrac{7}{3}}i$ 。
   (4) ×：因 $i^2=-1$，但 $i^3=-i$，則不能比大小。
   (5) ○：$-\sqrt{-21}\times\sqrt{-1}=-\sqrt{21}\,i\times i=-\sqrt{21}\times i^2$
   $=-\sqrt{21}\times(-1)=\sqrt{21}$ 。
   故選(5)。
2. 因 $f(-5)=57$
   $\Rightarrow -125a+50+5b+7=57$
   $\Rightarrow 125a-5b=0$
   故 $f(5)=125a+50-5b+7=0+57=57$，
   故選(2)。
3. 因 $7^{\frac{1}{x}}\times7^{\frac{2}{x}}\times7^{\frac{3}{x}}\times7^{\frac{4}{x}}\times7^{\frac{5}{x}}\times7^{\frac{6}{x}}=7^{\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}+\frac{6}{x}}=7^{\frac{21}{x}}$ 為整數
   $\Rightarrow \dfrac{21}{x}$ 為正整數，
   故 $x=1,3,7,21$，共 4 個，
   故選(3)。
4. 若光圈面積大約增為 5 倍，光圈係數應該往數字小的那端調整。若光圈面積大約增為 5 倍，則光圈孔徑大約增為 $\sqrt{5}$ 倍，因為每移動一格可使孔徑增為 $\sqrt{2}$ 倍。
   假設移動 n 格，可列式得 $(\sqrt{2})^n\ge\sqrt{5}$ ，解得 $n=3$。
   即光圈係數需調整 3 格以上才能讓光圈面積大約增為現在的 5 倍以上。
   故選(1)。
   ＜另解＞
   設原本的光圈面積與光圈係數為 A_1, k_1，後來的光圈面積與光圈係數為 A_2, k_2。
   依題目敘述可得：$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}}$ ，又 $\dfrac{A_2}{A_1}>5$，
   則可得：$\dfrac{5.6}{k_2}>\sqrt{5}\Rightarrow k_2<\dfrac{5.6}{\sqrt{5}}\approx2.5$。
   故將光圈係數調至 2 即可。
   故選(1)。
5. 每過 2 小時，細菌數量會變為原本的 $2^6\times(0.2)=12.8$ 倍。
   則經過 9 小時後，細菌數量為 A 的 $2^3\times(12.8)^4$ 倍，
   令 $k=2^3\times(12.8)^4=2^3\times(2^7\times10^{-1})^4=2^{31}\times10^{-4}$，
   則 $\log k=\log(2^{31}\times10^{-4})=31\times\log2-4\approx5.33=5+0.33$
   $\approx\log10^5+\log2.14=\log(2.14\times10^5)$，
   故 k 約為 214000。
   故選(3)。
6. (i) 當 $0<x<1$：
   $\log_x(y^2+6)>\log_x(5y)$
   $\Rightarrow y^2+6<5y$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow y^2-5y+6<0$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow (y-3)(y-2)<0$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow 2<y<3$。
   (ii) 當 $1<x<2$：
   $\log_x(y^2+6)>\log_x(5y)$
   $\Rightarrow y^2+6>5y$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow y^2-5y+6>0$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow (y-3)(y-2)>0$ 且 $0<y<4$
   $\Rightarrow y>3$ 或 $y<2$ 且 $0<y<4\Rightarrow 0<y<2$ 或 $3<y<4$，



   所有點 (x,y) 所形成的圖形的面積為 4，
   故選(2)。

二、多選題

7. (1) ×：因 $-3\le x-1\le3\Rightarrow -2\le x\le4$。
   (2) ○：因 $-1\le y+1\le1\Rightarrow -2\le y\le0$。
   (3) ○：因 $-4\le x+y\le4$。
   (4) ×：因 $0\le x^2\le16$，$0\le y^2\le4$，
   故 $0\le x^2+y^2\le20$。
   (5) ×：因 $xy-3x+4y+5=(x+4)(y-3)+17$，
   又 $2\le x+4\le8$，$-5\le y-3\le-3$
   $\Rightarrow -40\le(x+4)(y-3)\le-6$
   $\Rightarrow -23\le(x+4)(y-3)+17\le11$，
   則 $-23\le xy-3x+4y+5\le11$。
   故選(2)(3)。
8. (1) × (2) × (3) ○：
   小國的總分 $=3x^3+x^2+x+5$，
   小康的總分 $=x^3+2x^2+3x+4$，
   所以小國的總分與小康的總分相差為
   $f(x)=(3x^3+x^2+x+5)-(x^3+2x^2+3x+4)$
   $=2x^3-x^2-2x+1$
   $=(x-1)(x+1)(2x-1)$。



   ①當 $x>1$ 或 $-1<x<\dfrac{1}{2}$ ，$x\ne0$，$f(x)>0$
   $\Rightarrow$ 小國總分大於小康總分。
   ②當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，$f(x)=0$
   $\Rightarrow$ 小國總分等於小康總分。
   ③當 $x<-1$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 時，$f(x)<0$
   $\Rightarrow$ 小國總分小於小康總分。
   (4) ×：由(1)可知，當 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 時，
   小康的總分也會大於小國的總分。
   (5) ○：由(1)可知，當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，兩人的總分相同。
   故選(3)(5)。

9. 因 $A=\log_{\pi^{-1}} e=-\log_{\pi} e \Rightarrow -1<A<0$，

$B=\log_{e^{-1}} \pi=-\log_{e} \pi \Rightarrow -2<B<-1$，

$C=\log_{e^{-1}} \pi^{-1}=\log_{e} \pi \Rightarrow 1<C<2$，

$D=\log_{\pi^{-1}} e^{-1}=\log_{\pi} e \Rightarrow 0<D<1$，

所以 $C>D>A>B$，

故選(2)(4)。

10. 設小翊慢跑的拋物線為 $y=a(x-2)^2-1$，

則 $(0,3)$ 代入可得 $a=1 \Rightarrow y=(x-2)^2-1$，

又小辰跑步的直線路徑為 $y=mx-3$，

由題意可知 $(x-2)^2-1>mx-3$

$\Rightarrow x^2-(4+m)x+6>0$ 恆成立，

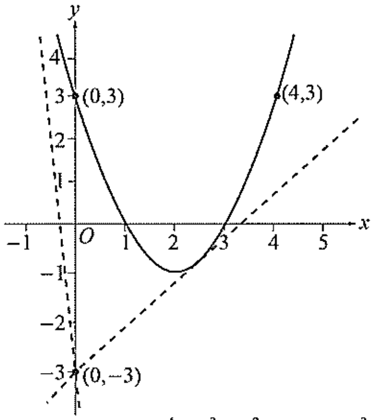
由 $D<0$ 可得 $[-(4+m)]^2-4\times1\times6<0$

$\Rightarrow m^2+8m-8<0$

$\Rightarrow -4-2\sqrt{6}<m<-4+2\sqrt{6}$

$\Rightarrow -8.898<m<0.898$，

故選(2)(3)(4)。



11. (1) ○：$f(x)=x^4-x^3-x^2+x=x(x^3-x^2-x+1)$

$=x(x+1)(x-1)^2$。

所以 $f(x)=0$ 的根為 $0,-1,1$（重根）。

(2) ×：$x(x+1)(x-1)^2\le0$ 的解為 $-1\le x\le0$ 或 $x=1$。

$x(x+1)\le0$ 的解為 $-1\le x\le0$。

(3) ○：$g(x)=x^2+(3-a)x-3a=(x-a)(x+3)$，

$g(x)=0$ 的根為 -3 , a。

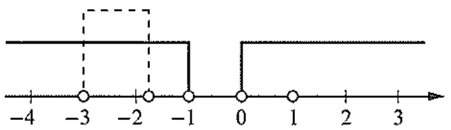
(4) ×：(i) 若 $a>-3$，$g(x)<0$ 的解為 $-3<x<a$。

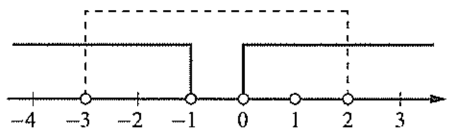
(ii) 若 $a<-3$，$g(x)<0$ 的解為 $a<x<-3$。

所以無法同時含有 π 及 $-\pi$。

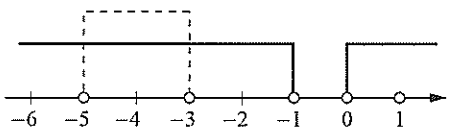
(5) ×：$f(x)>0$ 的解為 $x>0$ 或 $x<-1$ 但 $x\ne1$。

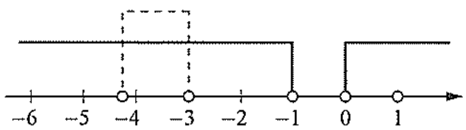
(i) 如圖所示，若 $a>-3$，$g(x)<0$ 的解為 $-3<x<a$，若整數解只有 -2，則 $-2<a\le2$。





(ii) 如圖所示，若 $a<-3$，$g(x)<0$ 的解為 $a<x<-3$，若整數解只有 -4，則 $-5\le a<-4$。





故選(1)(3)。

12. (1) ○：由餘式定理，$f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 $f(2)$。

將 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $f(2x+1)=16x^3+4x^2+6x-2$ 中，

可得 $f(2)=16\times(\frac{1}{2})^3+4\times(\frac{1}{2})^2+6\times(\frac{1}{2})-2=4$。

(2) ×：將 $x=\frac{t-1}{2}$ 代入 $f(2x+1)=16x^3+4x^2+6x-2$ 中，

可得 $f(t)=16\times(\frac{t-1}{2})^3+4\times(\frac{t-1}{2})^2+6\times(\frac{t-1}{2})-2$

$=2(t-1)^3+(t-1)^2+3(t-1)-2$，

即 $f(x)=2(x-1)^3+(x-1)^2+3(x-1)-2$，

故 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3(x-1)-2=3x-5$。

(3) ○：設 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2(x-2)$ 的商式為 $Q(x)$，

並利用牛頓插值法將餘式設為 $p(x-1)^2+3x-5$，

依除法原理可列式：

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+p(x-1)^2+3x-5$，

因 $f(2)=4 \Rightarrow p=3$，

所以餘式為 $3(x-1)^2+3x-5=3x^2-3x-2$。

(4) ○ (5) ○：

將 $x=\frac{1}{4}$ 代入 $f(2x+1)=16x^3+4x^2+6x-2$ 中，

得 $16\times(\frac{1}{4})^3+4\times(\frac{1}{4})^2+6\times\frac{1}{4}-2=0$。

因 $4x-1$ 是 $f(2x+1)$ 的因式，

所以 $f(2x+1)=16x^3+4x^2+6x-2$

$=(4x-1)(4x^2+2x+2)$，

故 $f(2x+1)=0$ 有一實根 $\frac{1}{4}$ 與兩虛根。

將 $x=\frac{1}{4}$ 代入 $f(2x+1)=16x^3+4x^2+6x-2$ 中，

可得 $f(\frac{3}{2})=16\times(\frac{1}{4})^3+4\times(\frac{1}{4})^2+6\times\frac{1}{4}-2=0$。

由此可知 $f(x)=0$ 有一實根為 $\frac{3}{2}$，

同理可得 $f(x)=0$ 另外兩根為虛根。

則 $f(x^2)=0$ 有兩實根 $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$，另外四根為虛根。

故選(1)(3)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. $\dfrac{\frac{1}{1-i}+(1-i)}{\frac{1}{1+i}+(1+i)}=\dfrac{\frac{1+i}{2}+(1-i)}{\frac{1-i}{2}+(1+i)}=\dfrac{1+i+(2-2i)}{1-i+(2+2i)}$

$=\dfrac{3-i}{3+i}=\dfrac{8-6i}{10}=\dfrac{4-3i}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$。

B. 因 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

$\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。

因 $\alpha+\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}\times(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}=1$，

$\alpha\times\beta=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}$。

則 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\times\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{2}$。

C. 因 $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$，

故 L_1 和 L_2 交於 $(2,0)$。

L_1 的斜率為 2 與 L_2 的斜率為 -2 互為相反數，如下圖，

$x=2$ 為 $y=x^2+ax+b$ 的對稱軸

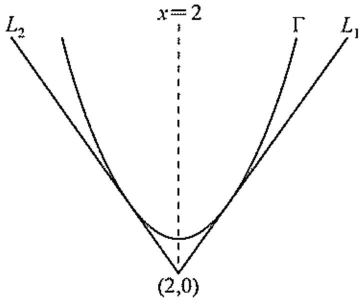
$\Rightarrow \dfrac{-a}{2\times 1}=2 \Rightarrow a=-4$。

再由 $x^2-4x+b=2x-4 \Rightarrow x^2-6x+(b+4)=0$，

恰有一組解，判別式為 0 $\Rightarrow (-6)^2-4\times 1\times(b+4)=0$

$\Rightarrow 36-4(b+4)=0 \Rightarrow b=5$，

故 $(a,b)=(-4,5)$。



＜另解＞

因 $\begin{cases} y=x^2+ax+b \\ y=2x-4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} y=x^2+ax+b \\ y=-2x+4 \end{cases}$ 恰均有一組解

$\Rightarrow x^2+(a-2)x+(b+4)=0$ 與 $x^2+(a+2)x+(b-4)=0$ 的判別式皆為 0

$\Rightarrow \begin{cases} (a-2)^2-4(b+4)=0 \\ (a+2)^2-4(b-4)=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(-4,5)$。

D. (1) 令 $x=3$ 代入，則 $1=s$。

(2) 令 $x=1$ 代入，則 $-16+12+1=-2r+1 \Rightarrow r=2$。

(3) 令 $x=-1$ 代入，則

$-128+48+1=q\times(-2)\times(-4)+2\times(-4)+1$

$\Rightarrow q=-9$。

(4) 令 $x=0$ 代入，則

$-54+27+1=p\times(-1)\times(-3)\times 1+(-9)\times(-1)\times(-3)+2\times(-3)+1$

$\Rightarrow p=2$。

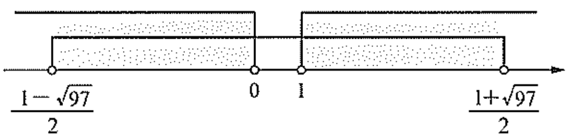
由(1)(2)(3)(4)可知，$p+q+r+s=2+(-9)+2+1=-4$。

E. 由題意可知 $|x+3|\times|x-4|<12$

$\Rightarrow |x^2-x-12|<12 \Rightarrow -12<x^2-x-12<12$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-x-12<12 \\ x^2-x-12>-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-24<0 \\ x^2-x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{97}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{97}}{2} \\ x>1 \text{ 或 } x<0 \end{cases}$



$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{97}}{2}<x<0$ 或 $1<x<\dfrac{1+\sqrt{97}}{2}$，

所以 $x=-4,-3,-2,-1,2,3,4,5$，

則 $(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+2+3+4+5=4$。

F. 由根與係數性質可得

$\log_{36}a+\log_{36}b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_{36}(ab)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow ab=6$，

因 $a>0$ 且 $b>0$，

故由算幾不等式可得 $\dfrac{2a+3b}{2} \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow 2a+3b \geq 12$。

G. 因 $f(-1)f(-2)<0$，所以在 $-2<x<-1$ 之間，

$f(x)=0$ 有實根，假設該負根為有理根，

令 $x=\dfrac{b}{a}$，其中 a 為 12 的因數，b 為 6 的因數，

且 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$，$\dfrac{b}{a}$ 可能為 $\dfrac{-3}{2}$。

$$\begin{array}{rrrr|l} 12 & +\ 4 & -\ 17 & +\ 6 & -\frac{3}{2} \\ +) & -\ 18 & +\ 21 & -\ 6 & \\ \hline 12 & -\ 14 & +\ 4 & +\ \boxed{0} & \leftarrow \text{餘數} \end{array}$$

$f(x)=(2x+3)(6x^2-7x+2)=(2x+3)(2x-1)(3x-2)$，

因此負根只有 $\dfrac{-3}{2}$。

H. 因 $\triangle ABE \sim \triangle EBC$，

所以 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{BE}^2=\overline{AB}\times\overline{BC}=4-2\sqrt{3}$，

得 $\overline{BE}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$。

因 $\triangle ABF \sim \triangle FBD$，

所以 $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \Rightarrow \overline{BF}^2=\overline{AB}\times\overline{BD}=4+2\sqrt{3}$，

得 $\overline{BF}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$。

故 $\overline{BE}^3+\overline{BF}^3=(\sqrt{3}-1)^3+(\sqrt{3}+1)^3$

$=[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)]^3-3\times 2\times[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)]$

$=(2\sqrt{3})^3-3\times 2\times(2\sqrt{3})$

$=12\sqrt{3}$。