數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(A)	(D)	(E)	(D)	(A)	(E)	(C)
8.	9.	10.	11.	12.	13.	
(A)(C)(E)	(A)(B)(D)(E)	(A)(C)(D)	(A)(B)(E)	(A)(C)(D)	(B)(D)	

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. (A)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的斜率

解析：直線 L 的斜率為 $\dfrac{2-k}{k+2}$

直線 $3x+y=5$ 的斜率為 -3

因為兩直線平行，所以 $\dfrac{2-k}{k+2}=-3$

得 $k=-4$，此時直線 L 與直線 $3x+y=5$ 平行

故選(A)。

2. (D)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值的幾何意義

解析：令點 P 的坐標為整數 x

由於 $\sqrt{173}=13.\cdots\cdots$，$\sqrt{57}=7.\cdots\cdots$

則數線上與點 $\sqrt{173}$ 的距離小於 6 的點 P 滿足：

$|x-\sqrt{173}|<6$

$\Rightarrow 7.\cdots\cdots=-6+\sqrt{173}<x<6+\sqrt{173}=19.\cdots\cdots$

即 $8\leq x\leq 19$

數線上與點 $\sqrt{57}$ 的距離大於 4 的點 P 滿足：

$|x-\sqrt{57}|>4$

$\Rightarrow x>4+\sqrt{57}=11.\cdots\cdots$ 或 $x<-4+\sqrt{57}=3.\cdots\cdots$

即 $x\geq 12$ 或 $x\leq 3$

所以 $12\leq x\leq 19$

可得 $x=12$，13，14，15，16，17，18，19，共 8 個

故選(D)。

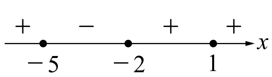
3. (E)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式不等式

解析：$2(x-1)^2(x+2)^2-(x-1)^3(x+2)=(x-1)^2(x+2)(x+5)\leq 0$

所以不等式的解為 $x=1$ 或 $-5\leq x\leq -2$



因此滿足不等式的整數解 x 為 1，-2，-3，-4，-5，共 5 個

故選(E)。

4. (D)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的切線方程式

解析：因為圓 C 與直線 L 相切

所以半徑 $=d(A\ ,L)=\dfrac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

又 $d(A\ ,x\text{ 軸})=5$

因為圓 C 與 x 軸交於相異兩點

所以 $\dfrac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}>5$

平方得 $49m^2+14m+1>25m^2+25$

即 $12m^2+7m-12>0$

因式分解得 $(4m-3)(3m+4)>0$

所以 $m>\dfrac{3}{4}$ 或 $m<-\dfrac{4}{3}$ (不合)

故選(D)。

5. (A)

出處：第一冊〈多項式函數〉

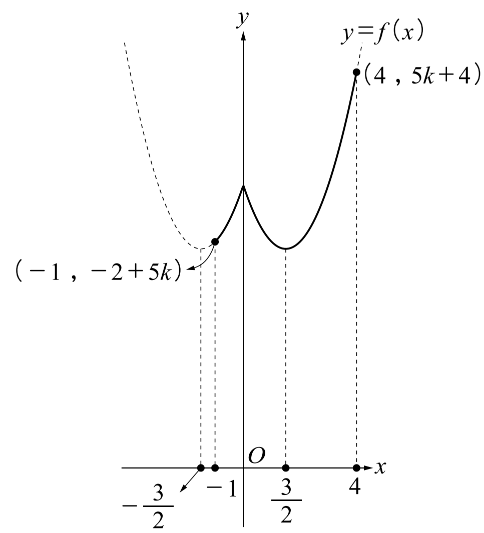
目標：多項式函數圖形

解析：當 $x\geq 0$ 時，$f(x)=x^2-3x+5k$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5k-\frac{9}{4}$$

當 $x<0$ 時，$f(x)=x^2+3x+5k$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+5k-\frac{9}{4}$$



由上圖知，在 $-1\leq x\leq 4$ 時

最大值為 $f(4)=4^2-3\cdot 4+5k=5k+4=14$

$\Rightarrow k=2$

故選(A)。

6. (E)

出處：第一冊〈直線與圓〉

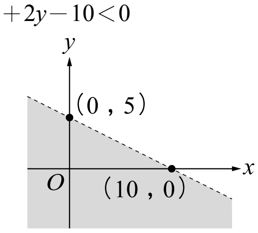
目標：圓與點位置關係，二元一次不等式

解析：設圓 C 的半徑為 r

因為點 A 在圓 C 的內部且點 B 在圓 C 的外部，所以 $\overline{PA}<r<\overline{PB}$

即 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{(x-4)^2+(y-8)^2}$

化簡得 $x+2y-10<0$



故選(E)。

7. (C)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：對數的意義

解析：已知 n^n 是 n 位數，所以 $10^{n-1}\le n^n<10^n$，

得 $1\le n<10$

n	1	2	3	4	5	6
n^n	1	4	27	256	3125	46656

若 $n=7$，則 $7^7=10^{7\log 7}\approx 10^{5.9157}$

得 $10^5\le 7^7<10^6$，為 6 位數

若 $n=8$，則 $8^8=2^{24}=10^{24\log 2}\approx 10^{7.224}$

得 $10^7\le 8^8<10^8$，為 8 位數

若 $n=9$，則 $9^9=3^{18}=10^{18\log 3}\approx 10^{8.5878}$

得 $10^8\le 9^9<10^9$，為 9 位數

所以滿足條件的正整數 n 為 1，8，9，共 3 個

故選(C)。

二、多選題

8. (A)(C)(E)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值的概念

解析：設約會地點 (x)

(A) ○：由題意可知共搭乘 $|3-(-5)|=8$ 站

(B) ╳：由題意列式得 $|x-3|+|x+5|=12$

解得 $x=5$ 或 -7

因此約會地點可能是松江南京站或七張站

(C) ○：由題意列式得 $|x-3|=|x+5|$，解得 $x=-1$，

因此約會地點必在古亭站

(D) ╳：由題意列式得 $|x-3|\le 6$ 且 $|x+5|\le 3$

解得 $-3\le x\le 9$ 且 $-8\le x\le -2$

則 $x=-2$ 或 -3

因此兩人選擇的約會地點可為台電大樓站或公館站，共 2 站

(E) ○：由題意列式得 $|x-3|-|x+5|=2$，解得

$x=-2$，因此約會地點必在台電大樓站

故選(A)(C)(E)。

9. (A)(B)(D)(E)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：令 $P(x,y)$ 滿足 $\overline{PA}=2\overline{PO}$，則

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \Gamma: x^2+(y+1)^2=4$

(A) ○：$\because 0^2+(1+1)^2=4$ $\therefore$點 $(0,1)$ 在 Γ 上

(B) ○：$\because 0^2+(-3+1)^2=4$ $\therefore$點 $(0,-3)$ 在 Γ 上

(C)(D)(E) $x^2+(y+1)^2=4$ 的圖形為一個圓，圓心是 $(0,-1)$

因此所有的點 P 與點 $(0,-1)$ 的距離相同

故(C) ╳；(D) ○；(E) ○

故選(A)(B)(D)(E)。

10. (A)(C)(D)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的平移與對稱性

解析：(A) ○：$y=x^3+4x$ 的圖形向右平移 1 單位，再向下平移 5 單位可與 $y=f(x)$ 的圖形重合

(B) ╳：$y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,-5)$

所以點 (r,s) 在 $y=f(x)$ 圖形上的充要條件為點 $(2-r,-10-s)$ 也在 $y=f(x)$ 的圖形上

(C) ○

(D) ○：$f(2)=1+4-5=0$

則由因式定理知 $f(x)$ 有 $x-2$ 的因式

所以可由長除法知

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)^3+4(x-1)-5\\ &=x^3-3x^2+7x-10\\ &=(x-2)(x^2-x+5)\end{aligned}$$

因為 $x^2-x+5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$ 恆正

所以 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸恰交於一點 $(2,0)$

(E) ╳：解方程式 $(x-1)^3+4(x-1)-5=x^3+4x$

得 $3x^2-3x+10=0$

由判別式 $(-3)^2-4\cdot 3\cdot 10<0$ 知方程式無實數解，因此兩圖形沒有交點

故選(A)(C)(D)。

11. (A)(B)(E)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式不等式

解析：$f(1)=f(2)=0$，$g(1)=g(3)=0$

由因式定理可設 $f(x)=a(x-1)(x-2)$，

$g(x)=b(x-1)(x-3)$，其中 a，b 為非零實數

則 $f(x)+g(x)=(x-1)[(a+b)x-(2a+3b)]$

(A) ○：當 $a+b=-1$ 且 $2a+3b=-1$ 即可滿足不等式

$f(x)+g(x)\ge 0$ 的解為 $x=1$

此時 $a=-2$ 且 $b=1$

(B) ○：當 $a+b=0$ 且 $2a+3b=1$ 即可滿足不等式

$f(x)+g(x)\ge 0$ 的解為 $x\le 1$

此時 $a=-1$ 且 $b=1$

(C) ╳：若不等式的解為 $x\le 0$ 或 $x\ge 4$

則 $x=0$ 與 $x=4$ 為 $f(x)+g(x)=0$ 的解

$f(0)+g(0)=f(4)+g(4)=0$

得 $2a+3b=0$ 且 $2a+b=0$

則 $a=b=0$，不合

(D) ╳：若不等式的解為 $x\le 1$ 或 $x\ge 3$，則

$f(3)+g(3)=2a=0$，不合

(E) ○：當 $a+b=1$ 且 $2a+3b=1$ 即可滿足不等式

$f(x)+g(x)\ge 0$ 的解 x 為任意實數，

此時 $a=2$ 且 $b=-1$

故選(A)(B)(E)。

12. (A)(C)(D)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：算幾不等式、圓的方程式、點到直線距離

解析：(A) ○(B) ╳：$x^2-2ax+y^2-\frac{4}{a}y=0$

$$\Rightarrow (x-a)^2+\left(y-\frac{2}{a}\right)^2=a^2+\frac{4}{a^2}$$

所以圓心 P 的坐標為 $\left(a,\frac{2}{a}\right)$

半徑 $\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{4}{a^2}}}$

$=\sqrt{4}=2$

最小值為 2，沒有最大值

(C) ○(D) ○：$\overline{OP}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2}{a}\right)^2}$

$=\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{4}{a^2}}}=\sqrt{4}=2$

所以最小值 $m=2$，此時 $a^2=\dfrac{4}{a^2}$

且 $a>0$

可得 $a=\sqrt{2}=t_0$

(E) ╳：承上，當 $a=t_0=\sqrt{2}$ 時，

圓 C：$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=2^2$

圓心 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，半徑為 2

則圓心 P 到直線 $x+y+4=0$ 的距離為

$\dfrac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2+2\sqrt{2}>2$ (半徑)

所以圓 C 上的點與直線 $x+y+4=0$ 距離的最大值 $k=(2+2\sqrt{2})+2=4+2\sqrt{2}$

故選(A)(C)(D)。

13. (B)(D)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式函數及其圖形

解析：函數 $f(x)$ 的圖形通過原點與點 $(3, 0)$，且對稱於原點，所以其圖形必通過點 $(-3, 0)$

令 $f(x)=kx(x+3)(x-3)$，其中 $k<0$，$-c\leq x\leq c$

則 $g(x)=af(x)+b=akx(x+3)(x-3)+b$

(A) ╳：$g(x)$的圖形為 $af(x)$ 的圖形再上平移 b 單位，因此不會對稱於原點

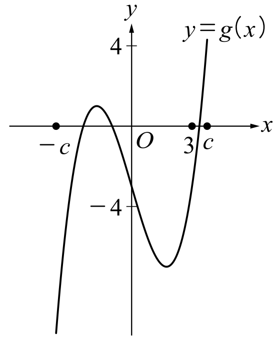
(B) ○：若 $a=-1$，$-4<b<0$ 時，

$g(x)=-kx(x+3)(x-3)+b$

因此其圖形是先將 $f(x)$ 的圖形對 x 軸作對稱，再向下平移 $|b|$ 單位，如下圖

在區間 $[3, c]$ 上，$g(x)$ 的圖形與 x 軸有交點

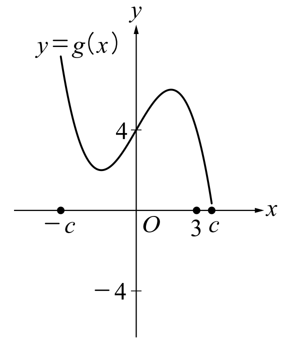
所以 $t>3$



(C) ╳：取 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=4$ 時，$g(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+4$，

如下圖

其圖形在 $-c\leq x\leq c$ 時有可能與 x 軸不相交



(D) ○：若 $a\geq 1$，$0<b<4$ 時

$g(x)=af(x)+b=a\left(f(x)+\dfrac{b}{a}\right)$

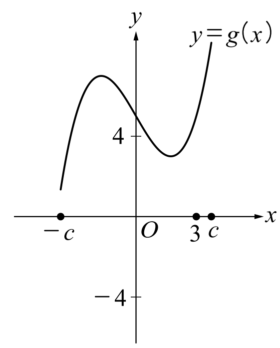
而 $0<\dfrac{b}{a}<4$，所以將 $f(x)$ 的圖形向上平移 $\dfrac{b}{a}$ 單位

其圖形在 $-c\leq x\leq c$ 時仍與 x 軸有三個相異交點

(E) ╳：取 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=5$ 時，$g(x)=-\dfrac{1}{2}f(x)+5$

如下圖

其圖形在 $-c\leq x\leq c$ 時與 x 軸不相交



故選(B)(D)。

三、選填題

14. $7x+2$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理

解析：由餘式定理知 $f(1)=9$，$f(2)=8$

令 $g(x)=xf(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

則 $g(1)=1\cdot f(1)=9=a+b$ 且

$g(2)=2\cdot f(2)=16=2a+b$

可解得 $a=7$，$b=2$

因此所求餘式為 $7x+2$。

15. 22

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：對數的意義

解析：由題意得 $16=12\cdot\dfrac{\log 10+k}{\log 2+k}$

解得 $k=3-4\log 2$

$\therefore v(100)=16\cdot\dfrac{\log 100+k}{\log 10+k}$

$=16\cdot\dfrac{5-4\log 2}{4-4\log 2}$

$\approx 21.7\approx 22$

即最大風速為 22 km / hr。

16. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：數的概念、多項式方程式

解析：因為 $0<\dfrac{x^2}{5}<1$，所以 $0<x<\sqrt{5}$

得 x 的整數部分可能為 0，1，2

若 x 的整數部分為 0，則

$x=0+\dfrac{x^2}{5}$，得 $x=0$ 或 5，不合

若 x 的整數部分為 1，則

$x=1+\dfrac{x^2}{5}$，得 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ $\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}>\sqrt{5}\text{，不合}\right)$

若 x 的整數部分為 2，則 $x=2+\dfrac{x^2}{5}$，無解

故正實數 $x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$。

17. 12

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的方程式

解析：因為 $\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{0-13}{39-0}=-\dfrac{1}{3}$

所以 $\overline{AB}$ 中垂線的斜率為 3

則 $\overline{AB}$ 的中垂線方程式為 $y-\dfrac{13}{2}=3\left(x-\dfrac{39}{2}\right)$

即 $3x-y=52$

圓心在 $\overline{AB}$ 的中垂線上

設圓心坐標為 $P(t\,,3t-52)$

又半徑 $r=25$

所以 $\overline{PB}=\sqrt{t^2+(3t-65)^2}=25$

得 $t^2-39t+360=0$

因式分解得 $(t-15)(t-24)=0$

$\Rightarrow t=15$ 或 24

解得圓心為 $(15\,,-7)$ 或 $(24\,,20)$ (不合)

所求為 $r-\overline{PC}=25-\sqrt{5^2+12^2}$

$=25-13=12$

故距離的最小值為 12 單位。

第貳部分：混合題

18. (E)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的四則運算

解析：由長除法知，多項式 $x^3+3x^2-16x+6$ 除以 x^2-2x 的商式為 $x+5$，餘式為 $-6x+6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & +\ 5 & & \\
\hline
x^2-2x+0 & x^3 & +\ 3x^2 & -\ 16x & +\ 6 \\
 & x^3 & -\ 2x^2 & +\ 0x & \\
\hline
 & & 5x^2 & -\ 16x & +\ 6 \\
 & & 5x^2 & -\ 10x & +\ 0 \\
\hline
 & & & -\ 6x & +\ 6
\end{array}
$$

故選(E)。

19. $1+\sqrt{7}$

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：有理數與無理數的意義、多項式的四則運算

解析：由除法原理知 $x^3+3x^2-16x+6=(x^2-2x)(x+5)-6x+6$

將 $x=a$ 代入得

$a^3+3a^2-16a+6=(a^2-2a)(a+5)-6a+6$

即 $P=Q(a+5)-6a+6$

化簡可得 $(Q-6)\,a=P-5Q-6$

因為 P，Q 皆為有理數

若 $Q-6\neq0$，則 $a=\dfrac{P-5Q-6}{Q-6}$ 為有理數，矛盾

所以 $Q-6=0$ 且 $P-5Q-6=0$

可解得 $Q=6$，$P=36$

因此 $a^2-2a=6$，即 $(a-1)^2=7$

$\Rightarrow a=1\pm\sqrt{7}$ $(1-\sqrt{7}$ 為負數，不合)

所以 $a=1+\sqrt{7}$。