數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(3)	(5)	(3)	(4)	(1)	(1)(2)
8.	9.	10.	11.	12.		
(3)(5)	(1)(2)(3)	(2)(3)(5)	(1)(2)	(3)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數運算

解析：所求為 $1000\times(1+10\%)+1000\times(1+10\%)^2=2310$ (人)

故選(4)。

2. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數運算

解析：$a^{1.15}=10 \Rightarrow a=10^{\frac{1}{1.15}}$

∴基礎設施要擴大為

$a^{0.85}=(10^{\frac{1}{1.15}})^{0.85}=10^{\frac{0.85}{1.15}}\approx 10^{0.74}\approx 10^{\log 5.50}=5.50$ (倍)

故選(3)。

3. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：高次不等式

解析：由函數圖形可看出

當 $-2<x<4$，$x\neq 1$ 時函數值為正

因此 $f(x)>0$ 的解為 $-2<x<4$ 且 $x\neq 1$

整數解為 $x=-1$，0，2，3，其乘積為 0，故選(5)。

4. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：常用對數與科學記號

解析：$3^n\approx(10^{0.4771})^n=10^{0.4771n}$ 為 49 位數

$\therefore 48\leq 0.4771n<49 \Rightarrow \dfrac{48}{0.4771}\leq n<\dfrac{49}{0.4771}$

$\Rightarrow 100.\cdots\cdots\leq n<102.\cdots\cdots$，故自然數 $n=101$，102

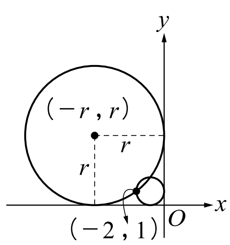
其總和為 $101+102=203$，故選(3)。

5. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式的假設法、點到直線的距離公式

解析：如右圖



設圓半徑為 $r \Rightarrow$ 圓心 $(-r, r)$

∴圓：$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

點 $(-2, 1)$ 代入

得 $(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$

$\Rightarrow r^2-6r+5=0 \Rightarrow r=1$ 或 5

∴圓心為 $(-1, 1)$ 或 $(-5, 5)$

$(-1, 1)$ 到 $3x-4y+21=0$ 的距離為

$\dfrac{|-3-4+21|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{14}{5}$

$(-5, 5)$ 到 $3x-4y+21=0$ 的距離為

$\dfrac{|-15-20+21|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{14}{5}$，故選(4)。

6. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉、〈直線與圓〉

目標：圓方程式的假設法、直線與圓

解析：$x^2+y^2+2mx+2(m+1)y+3m^2+m=0$

$\Rightarrow (x+m)^2+[y+(m+1)]^2=-m^2+m+1$

∵其圖形為一圓

$\therefore -m^2+m+1>0$

$\Rightarrow m^2-m-1<0$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ……………………………①

∵圓心 $(-m, -m-1)$ 在第四象限

$\therefore -m>0$，$-m-1<0 \Rightarrow -1<m<0$ ……………②

由①、②得 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0$

故 $\alpha+\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+0=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，

故選(1)。

二、多選題

7. (1)(2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：分點坐標公式

解析：(1) ○：$\dfrac{81}{100}=0.81>0.\overline{80}=\dfrac{80}{99}$

(2) ○：將右式的分母分子同乘以 7，可得

$\dfrac{7^{99}+1}{7^{80}+1}=\dfrac{7^{100}+7}{7^{81}+7}<\dfrac{7^{100}+1}{7^{81}+1}$ (假分數的分母分子加同一正數，其值變小)

(3) ╳：$0.4\overline{9}=\dfrac{49-4}{90}=\dfrac{1}{2}=0.5$

(4) ╳：反例：取 $x=-1$

$\Rightarrow |x+1|-|x-3|=0-4=-4\not>-2$

(5) ╳：$\dfrac{2a+5b}{7}=\dfrac{6a+15b}{21}$，$\dfrac{2a+b}{3}=\dfrac{14a+7b}{21}$

$\because a<b \quad \therefore \dfrac{6a+15b}{21}>\dfrac{14a+7b}{21}$

即 $\dfrac{2a+5b}{7}>\dfrac{2a+b}{3}$

故選(1)(2)。

8. (3)(5)

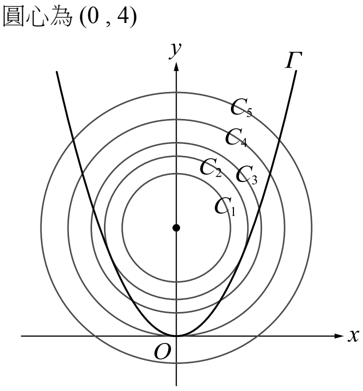
出處：第一冊〈多項式函數〉、〈直線與圓〉

目標：圓方程式、二次函數圖形、二次方程式

解析：由 $\Gamma \Rightarrow x^2=2y$

代入 C 整理得 $y^2-6y+(16-r^2)=0$ ……………①

如下圖，圓心為 $(0, 4)$



求圓 C_2 的半徑 r：

$\because$ 圓 C_2 與 Γ 的兩個交點的 y 坐標相同

$\therefore$ ①之 y 只有一解(即重根)

故判別式 $D=(-6)^2-4\times1\times(16-r^2)=0\Rightarrow r=\sqrt{7}$

由圖知圓 C_4 的半徑 $r=4$，由圖得下表：

Γ 與 C 交點個數	r 的範圍
0	$0<r<\sqrt{7}$
2	$r=\sqrt{7}$ 或 $r>4$
3	$r=4$
4	$\sqrt{7}<r<4$

(1) ╳：將 $r=\sqrt{23}$ 代入①

得 $y^2-6y-7=0$

$\Rightarrow y=7$ 或 $-1\left(\text{不合}\ \because y=\dfrac{x^2}{2}\geq 0\right)$

$y=7$ 代入 $x^2=2y$，得 $x^2=14\Rightarrow x=\pm\sqrt{14}$

故圓 C_2 與 Γ 有兩個交點為

$(\sqrt{14},7)$，$(-\sqrt{14},7)$

(2) ╳：交點個數不可能恰有 1 個

(3) ○：$r=4$

(4) ╳：$r=\sqrt{7}$ 或 $r>4$

(5) ○：此時圓是 C_2 $\therefore r=\sqrt{7}$

代入①，得 $y^2-6y+9=0$

$\Rightarrow y=3$ (重根)，是整數

故選(3)(5)。

9. (1)(2)(3)

出處：第一冊〈多項式函數〉、〈直線與圓〉

目標：多項式不等式的實根與多項式函數的圖形、三次函數對稱中心與一次近似

解析：(1) ○：$L: y=(k-3)x-(k+1)$

$\therefore$ 直線 L 的斜率為 $k-3$

(2) ○：$(1,-4)$ 代入 $L: y=(k-3)x-(k+1)$，合

$\therefore$ 直線 L 必過點 $(1,-4)$

(3) ○：

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & +0 & +(k-3) & -(k+1) & 1 \\ & +4 & +4 & +(k+1) & \\ \hline 4 & +4 & +(k+1) & +0 & \end{array}$$

$\because$ 餘式為 0

$\therefore f(x)$ 被 $x-1$ 整除

且 $f(x)=(x-1)[4x^2+4x+(k+1)]$

(4) ╳：令 $f(x)=(x-1)[4x^2+4x+(k+1)]=0$

$\Rightarrow x-1=0$ 或 $4x^2+4x+(k+1)=0$

$x-1=0\Rightarrow x=1$

$4x^2+4x+(k+1)=0\Rightarrow$ 無實數解

($\because$ 判別式 $D=4^2-4\times4\times(k+1)=-16k<0$)

$\therefore f(x)=0$ 只有 1 個實根 $x=1$

故 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸只有 1 個交點

(5) ╳：$f(x)=(x-1)[4x^2+4x+(k+1)]>0$

$\because 4x^2+4x+(k+1)$ 恆正

$\therefore x-1>0\Rightarrow x>1$

故選(1)(2)(3)。

10. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、〈指數、對數〉

目標：根式作圖、雙重根號化簡、對數

解析：(1) ╳：正確為 $a\approx1.618$

(2) ○：$a^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=a+1$

$\Rightarrow a=\sqrt{a+1}$

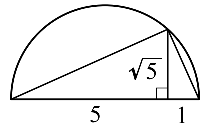
〈另解〉

$\sqrt{a+1}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}}$

$=\dfrac{\sqrt{(1+5)+2\sqrt{1\times5}}}{2}=\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{5}}{2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=a$

(3) ○：如下圖，先利用尺規作圖作 $\sqrt{5}$



再作 $1+\sqrt{5}$，最後再等分作圖，

即可得 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4) ╳：$\because a>1$

$\therefore \dfrac{1}{a}<1$，故 $a>\dfrac{1}{a}$

(5) ○：$10^{\log a}=a>1=10^0$

$\Rightarrow \log a>0$

故選(2)(3)(5)。

11. (1)(2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

解析：(1) ○：$\triangle AFD\sim\triangle DEC$ (AA 相似)

(2) ○：設 $\overline{FD}=x$，$\overline{DE}=y$

$\because \triangle AFD\sim\triangle DEC$

$\therefore \dfrac{5}{x}=\dfrac{y}{3}\Rightarrow xy=15$

故矩形 $FBED$ 的面積為 $xy=15$

(3) ╳：非定值

(4) ╳：$\triangle ABC$ 面積為

矩形 $FBED$ 面積 $+\triangle AFD$ 面積 $+\triangle DEC$ 面積

$=15+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{3y}{2}$

$=15+\dfrac{5x+3y}{2}$

由算幾不等式得

$\dfrac{5x+3y}{2}\geq\sqrt{5x\times3y}=\sqrt{15xy}=\sqrt{15\times15}=15$

故 $\triangle ABC$ 面積的最小值為 $15+15=30$

(5) ╳：承(4)

當 $\triangle ABC$ 的面積有最小值時，$5x=3y$

又 $xy=15$，聯立得 $x=3$，$y=5$

則 $\overline{FD}=x=3$

故選(1)(2)。

12. (3)(5)

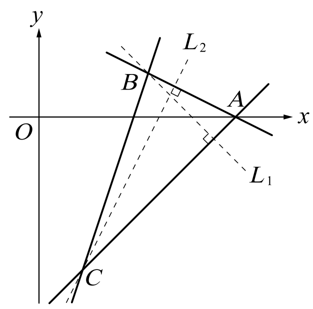
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線斜率與假設法、三角形三高的交點求法

解析：(1) ╳：$A(9, 0)$ 代入 L_2：$2x-y=11$，不合

$\therefore$ 直線 L_2 不通過頂點 A

(2) ╳：如下圖



$\because \overleftrightarrow{AB} \perp L_2$ 且 $m_2=-\dfrac{2}{-1}=2$

$\therefore m_{AB}=-\dfrac{1}{2}$

$\overleftrightarrow{AB}$：$y-0=-\dfrac{1}{2}(x-9)$

$\Rightarrow x+2y=9$

(3) ○：仿(2)，可得 $\overleftrightarrow{AC}$：$x-y=9$

(4) ╳：將 $\overleftrightarrow{AB}$：$x+2y=9$ 與 L_1：$x+y=7$ 解聯立

得 B 點坐標為 $(5, 2)$

(5) ○：將 L_1：$x+y=7$ 與 L_2：$2x-y=11$ 解聯立

得 $\triangle ABC$ 的垂心坐標為 $(6, 1)$

故選(3)(5)。

三、選填題

13. $\dfrac{1}{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

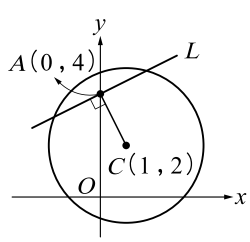
目標：直線斜率與垂直、圓方程式的假設法

解析：圓：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=4+1+4$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=3^2$

如下圖



當 $L \perp \overline{CA}$ 時

弦心距最大 $\Rightarrow$ 小弓形面積為最小

$m_{CA}=\dfrac{4-2}{0-1}=-2$，故 $m_L=\dfrac{1}{2}$

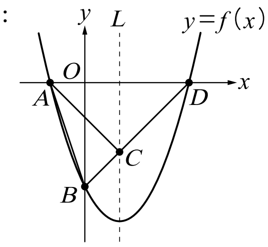
當直線 L 的斜率為 $\dfrac{1}{2}$ 時，小弓形的面積為最小。

14. -2

出處：第一冊〈多項式函數〉、〈直線與圓〉

目標：二次函數圖形、二元一次不等式

解析：



令 $f(x)=x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1$ 或 3

$\Rightarrow A(-1, 0)$，$D(3, 0)$

$f(0)=-3 \Rightarrow B(0, -3)$

$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4 \Rightarrow$ 對稱軸 L：$x=1$

A 點關於對稱軸 L 的對稱點為 D

當 C 點為 $\overline{BD}$ 與 L 的交點時，兩人走到 C 點的距離和 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 會最小

$m_{BD}=\dfrac{0-(-3)}{3-0}=1 \quad \therefore \overleftrightarrow{BD}$：$x-y-3=0$

再令 $x=1$ 代入，得 $y=-2 \quad \therefore C(1, -2)$

$m_{AC}=\dfrac{0-(-2)}{-1-1}=-1 \quad \therefore \overleftrightarrow{AC}$：$x+y+1=0$

故 $\angle ACB$ 的內部(不含邊界)：$\begin{cases} x-y-3<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$

再比較係數得 $a+b+c+d=-2$。

15. 3

出處：第一冊〈數與式〉

目標：乘法公式

解析：令 $x=2022$

$$\frac{2023^2}{2022}-\frac{2022^2}{2023}-\frac{1}{2022\times 2023}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{x}-\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)^3-x^3-1}{x(x+1)}=\frac{(x^3+3x^2+3x+1)-x^3-1}{x(x+1)}$$

$$=\frac{3x^2+3x}{x(x+1)}=\frac{3x(x+1)}{x(x+1)}=3。$$

16. $-3<x<3$

出處：第一冊〈數與式〉、〈多項式函數〉

目標：絕對值不等式、二次不等式

解析：①當 $x \geq 0$ 時

$x>x^2-6 \Rightarrow x^2-x-6<0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<3$

再與 $x \geq 0$ 取共同部分，得 $0 \leq x<3$

②當 $x<0$ 時

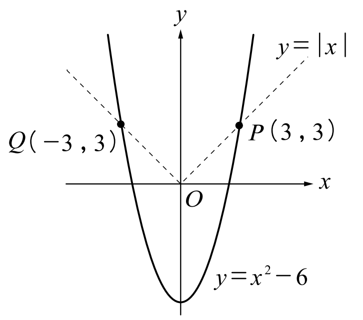
$-x>x^2-6 \Rightarrow x^2+x-6<0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)<0 \Rightarrow -3<x<2$

再與 $x<0$ 取共同部分，得 $-3<x<0$

由①、②得 $-3<x<3$。

〈另解〉



P：$\begin{cases} y=x \\ y=x^2-6 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 -2 (不合)

$\therefore P$ 點的 x 坐標為 3

$\because y=|x|$、$y=x^2-6$ 兩圖形都對稱於 y 軸

$\therefore Q$ 點的 x 坐標為 -3

所求不等式的解 x 範圍為

$y=|x|$ 在 $y=x^2-6$ 上方圖形的 x 範圍

故 $-3<x<3$。

17. -1

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的係數關係、除法原理、餘式定理

解析：$\because f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 2

$\therefore$設 $f(x)=(x-2)^2(ax+b)+2$

由餘式定理知 $f(-2)=2$，代回 $f(x)$

得 $16(-2a+b)+2=2 \Rightarrow 2a-b=0$ ………(*)

又 $f(x)$ 的常數項是 -6

$\Rightarrow f(0)=(-2)^2b+2=-6 \Rightarrow b=-2$

代回(*)，得 $a=-1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(-x-2)+2$

故 $f(x)$ 的所有係數和為 $f(1)=(-1)^2(-3)+2=-1$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $a=1$，$b=-3$，$c=4$，$d=1$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的對稱中心

解析：$\because (1 , 3)$ 為三次函數 C 的對稱中心

$\therefore$設 $C=a(x-1)^3+p(x-1)+3$

將 $(2 , 5)$、$(3 , 13)$ 代入

得 $5=a+p+3$，$13=8a+2p+3 \Rightarrow a=1$，$p=1$

代回得 $C=(x-1)^3+(x-1)+3=x^3-3x^2+4x+1$

$\therefore b=-3$，$c=4$，$d=1$

故 $a=1$，$b=-3$，$c=4$，$d=1$。

◎評分原則

$\because (1 , 3)$ 為三次函數 C 的對稱中心

$\therefore$設 $C=a(x-1)^3+p(x-1)+3$　(2 分)

將 $(2 , 5)$、$(3 , 13)$ 代入

得 $5=a+p+3$，$13=8a+2p+3 \Rightarrow a=1$，$p=1$　(2 分)

代回得 $C=(x-1)^3+(x-1)+3=x^3-3x^2+4x+1$

$\therefore b=-3$，$c=4$，$d=1$

故 $a=1$，$b=-3$，$c=4$，$d=1$。　(2 分)

19. ⑴1 千萬元；⑵方案 A

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的對稱中心

解析：⑴若公司停止接單

則獲利＝收入－成本＝$0-C(0)=-1$

即虧損 1 千萬元

〈另解〉$\because (0 , d)$ 與 $(2 , 5)$ 對稱於 $(1 , 3)$

$\therefore \dfrac{d+5}{2}=3 \Rightarrow d=1$ (千萬)……成本

$\because$無收入　$\therefore$虧損 1 千萬元

⑵$\because$公司停止接單虧損 1 千萬元，

繼續接單虧損 500 萬元

$\therefore$繼續接單較好

故公司每月虧損 1 千萬元，若老闆堅持繼續營運，選擇方案 A 對公司較好。

◎評分原則

⑴公司停止接單，則獲利＝收入－成本＝$0-C(0)=-1$

即虧損 1 千萬元　(2 分)

〈另解〉$\because (0 , d)$ 與 $(2 , 5)$ 對稱於 $(1 , 3)$

$\therefore \dfrac{d+5}{2}=3 \Rightarrow d=1$ (千萬)……成本

$\because$無收入　$\therefore$虧損 1 千萬元

⑵$\because$公司停止接單虧損 1 千萬元，

繼續接單虧損 500 萬元

$\therefore$繼續接單較好

故公司每月虧損 1 千萬元，若老闆堅持繼續營運，選擇方案 A 對公司較好。　(2 分)

20. ⑴⑵

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形的平移

解析：$C=(x-1)^3+(x-1)+3$

⑴ ○：$x^3+x+3 \xrightarrow{\text{右移 1 單位}} C=(x-1)^3+(x-1)+3$

⑵ ○：$x^3+x \xrightarrow[\text{上移 3 單位}]{\text{右移 1 單位}} C=(x-1)^3+(x-1)+3$

⑶⑷⑸均無法，故選⑴⑵。