全國高中 112 年(111 學年度)
高三上 第一次學測模擬考數學試題（108 課綱第一冊）

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 某一疾病發病的人數呈上升趨勢，經統計發現以每兩天上升10%的速度增加，已知週一、週二這兩天發病的人數共1000人，若依此上升的比例發展，則接下來的週三到週六這四天共有多少人發病？請選出最接近的答案。
(1) 2000 人　(2) 2152 人　(3) 2262 人　(4) 2310 人　(5) 4526 人。

答：(4)（108 課綱第一冊第一章指數）

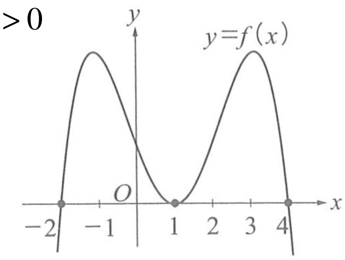
解：$1000\times\left[(1.1)+(1.1)^2\right]=2310$

2. 學者韋斯特提出一城市規模、基礎設施、公司數量有如下關係：若城市規模要擴大為a倍，則其基礎設施只要擴大為$a^{0.85}$倍，但公司數量可擴大為$a^{1.15}$倍。已知一城市想要將公司數量擴大為10倍，則基礎設施要擴大為幾倍？
(1) 5.25 倍　(2) 5.37 倍　(3) 5.50 倍　(4) 5.62 倍　(5) 5.75 倍。

答：(3)（108 課綱第一冊第一章對數）

解：$a^{1.15}=10\Rightarrow a^{0.85}=10^{\frac{0.85}{1.15}}\doteqdot 10^{0.74}\doteqdot 10^{\log 5.5}=5.5$

3. 四次函數$y=f(x)$的圖形如右，則不等式$f(x)>0$的所有整數解的乘積為何？
(1) -48
(2) -8
(3) -6
(4) 4
(5) 0 。



答：(5)（108 課綱第一冊第三章不等式）

解：$f(x)>0$之解：$-2<x<4$，$x\neq 1, x\in Z\Rightarrow x=-1,0,2,3,$

4. 若n為自然數，且3^n為49位數，符合上述條件的n值有兩個，則這兩個n值的總和為何？
(1) 199　(2) 201　(3) 203　(4) 205　(5) 207 。

答：(3)（108 課綱第一冊第一章對數）

解：$10^{48}\le 3^n=\left(10^{\log 3}\right)^n<10^{49}\Rightarrow 48\le 0.4771\times n<49$

$\Rightarrow\dfrac{48}{0.4771}\doteqdot 100.6\cdots\le n<\dfrac{49}{0.4771}\doteqdot 102.7\cdots, n\in N\Rightarrow n=101,102$

5. 若過點$(-2,1)$的圓與兩坐標軸均相切，則圓心到直線$3x-4y+21=0$的距離為何？
(1)$\frac{11}{5}$ (2)$\frac{12}{5}$ (3)$\frac{13}{5}$ (4)$\frac{14}{5}$ (5)3。

答：(4)（108 課綱第一冊第二章圓）

解：圓：$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$過$(-2,1)$ $\Rightarrow r^2-6r+5=0$
$\Rightarrow r=1.5$，圓心$(-1,1)$或$(-5,5)$
$\Rightarrow d((-1,1),3x-4y+21=0)=\frac{14}{5}$或$d((-5,5),3x-4y+21=0)=\frac{14}{5}$

6. 設m是實數，若方程式$x^2+y^2+2mx+2(m+1)y+3m^2+m=0$的圖形為一圓且圓心在第四象限，已知$m$的範圍為$\alpha<m<\beta$，則$\alpha+\beta=$？
(1)$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (2)$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (3)1 (4)0 (5)-1。

答：(1)（108 課綱第一冊第二章圓）

解：$(x+m)^2+(y+(m+1))^2=-m^2+m+1$
圓心$(-m,-m-1)\in$第四象限且$-m^2+m+1>0$
$\Rightarrow -m>0,-m-1<0,m^2-m-1<0$ $\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0$

二、多選題（占 30 分）

7. 下列選項中的不等式，何者正確？
(1)$\frac{81}{100}>\frac{80}{99}$
(2)$\frac{7^{100}+1}{7^{81}+1}>\frac{7^{99}+1}{7^{80}+1}$
(3)$0.4\overline{9}<0.5$
(4)對所有實數x，$|x+1|-|x-3|>-2$恆成立
(5)若$a<b$，則$\frac{2a+5b}{7}<\frac{2a+b}{3}$。

答：(1)(2)（108 課綱第一冊第一章有理數、實數）

解：(1)$\frac{80+1}{99+1}>\frac{80}{99}$ (2)$\frac{7^{99}+1}{7^{80}+1}=\frac{7^{101}+7}{7^{81}+7}<\frac{7^{101}+1}{7^{81}+1}$
(3)$0.4\overline{9}=0.5$ (4)$-4\le|x+1|-|x-3|\le 4$
(5)$a<b$，$\frac{5}{7}>\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{2a+5b}{7}>\frac{2a+b}{3}$

8. 下列有關二次函數Γ：$y=\frac{x^2}{2}$與圓C：$x^2+(y-4)^2=r^2$（其中$r>0$）兩圖形的敘述，何者正確？
(1)當$r=\sqrt{23}$時，Γ與C有4個交點
(2)Γ與C的交點個數可能有0，1，2，3，4個
(3)當Γ與C有3個交點時，此時r值只有一個
(4)當Γ與C有2個交點時，此時r值只有一個
(5)當Γ與C有2個交點且Γ不通過圓C內部時，此時交點的y坐標是整數。

答：(3)(5)（108 課綱第一冊第二章圓）

解：當 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 與 $x^2+(y-4)^2=r^2$ 相切

$\Rightarrow y^2-6y+\left(16-r^2\right)=0$ 的判別式 $=36-4\left(16-r^2\right)=0$

$$\Rightarrow r=\sqrt{7}\text{，故當}\begin{cases}0<r<\sqrt{7}\text{,}\Gamma\text{與}C\text{無交點}\\ r=\sqrt{7}\text{,}\Gamma\text{與}C\text{相切於 2 點}\\ \sqrt{7}<r<4\text{,}\Gamma\text{與}C\text{相交於 4 點}\\ r=4\text{,}\Gamma\text{與}C\text{相交於 3 點(含 1 切點)}\\ r>4\text{,}\Gamma\text{與}C\text{相交於 2 點}\end{cases}$$

9. 下列有關三次函數 $y=f(x)=4x^3+(k-3)x-(k+1)$（常數 $k>0$）的敘述，何者正確？

(1)若 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的一次近似圖形為直線 L，則直線 L 的斜率為 $k-3$

(2)承(1)，直線 L 必過點 $(1,-4)$

(3) $f(x)$ 可被 $x-1$ 整除

(4) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸可能會有 3 個交點

(5)不等式 $f(x)>0$ 的解為 $x<1$。

答：(1)(2)(3)　（108 課綱第一冊第三章三次函數）

解：(1)所求一次近似：$y=(k-3)x-(k+1)$

(2) $(1,-4)\in L$

(3) $f(1)=0$

(4) $f(x)=(x-1)\left[4x^2+4x+(k+1)\right]$，其中 $k>0$

$\because 4x^2+4x+(k+1)$ 恆正　　$\therefore y=f(x)$ 與 x 軸僅交一點

(5) $f(x)>0\ \Rightarrow x-1>0\ \Rightarrow x>1$

10. 設 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，下列選項何者正確？

(1) a 等於 1.618

(2) $\sqrt{a+1}$ 可化簡成 a

(3)可利用尺規作圖在數線上描出 a 的位置

(4) $a<\dfrac{1}{a}$

(5) $\log a$ 是正數。

答：(2)(3)(5)　（108 課綱第一冊第一章無理數）

解：(1) $a\in\overline{Q}\neq 1.618=Q$

(2) $(2a-1)^2=5\ \Rightarrow a^2-a-1=0\ \Rightarrow a^2=a+1\ \Rightarrow a=\sqrt{a+1}$

(3)平方根型無理數，可以尺規作圖

(4) $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}>\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

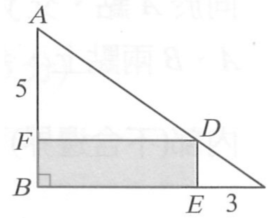
(5) $a>1$，$\log a>0$

11.如圖，矩形 $FBED$ 為直角 ΔABC 的內接矩形，$\overline{AF}=5$、$\overline{EC}=3$，請問下列何者正確？

(1) $\Delta AFD\sim\Delta DEC$ (2)矩形 $FBED$ 的面積是定值

(3)矩形 $FBED$ 的周長是定值 (4) ΔABC 面積的最小值是15

(5) ΔABC 的面積有最小值時，$\overline{FD}=5$。



答：(1)(2) （108 課綱第一冊第一章算幾不等式）

解：$\because \Delta ADF\sim\Delta DCE \Rightarrow \frac{5}{x}=\frac{y}{3} \Rightarrow xy=15$ $\therefore$矩形周長 $2(x+y)\geq 2\times 2\sqrt{xy}=4\sqrt{15}$

而 ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}(x+3)(y+5)=15+\frac{5x+3y}{2}\geq 15+\sqrt{5x\cdot 3y}=15+15=30$

等號成立於 $5x=3y=15 \Rightarrow x=3$，$y=5$

12.已知 ΔABC 的其中兩條高落在直線 L_1：$x+y=7$、L_2：$2x-y=11$ 上，又頂點 A 的坐標為 $(9,0)$，頂點 B 在第一象限，請問下列何者正確？

(1)直線 L_2 通過頂點 A (2) $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為 $3x-2y=27$

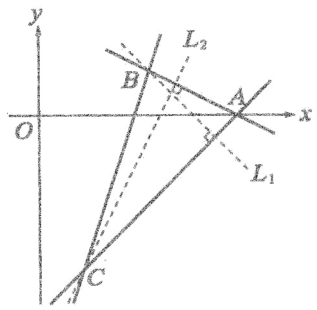
(3) $\overleftrightarrow{AC}$ 方程式為 $x-y=9$ (4) B 點坐標為 $(4,3)$

(5) ΔABC 的垂心坐標為 $(6,1)$，其中垂心為三角形三高的交點。

答：(3)(5) （108 課綱第一冊第二章直線）

解：(1) ×：$A(9,0)$ 代入 L_2：$2x-y=11$，不合$\therefore$直線 L_2 不通過頂點 A

(2) ×：如下圖



$\because \overleftrightarrow{AB}\perp L_2$ 且 $m_2=-\frac{2}{-1}=2$ $\therefore m_{AB}=-\frac{1}{2}$

$\overleftrightarrow{AB}$：$y-0=-\frac{1}{2}(x-9) \Rightarrow x+2y=9$

(3) ○：仿(2)，可得 $\overleftrightarrow{AC}$：$x-y=9$

(4) ×：將 $\overleftrightarrow{AB}$：$x+2y=9$ 與 L_1：$x+y=7$ 解聯立，得 B 點坐標為 $(5,2)$

(5) ○：將 L_1：$x+y=7$ 與 L_2：$2x-y=11$ 解聯立

得 ΔABC 的垂心坐標為 $(6,1)$

三、選填題（占 25 分）

13.已知直線 L 過點 $A(0,4)$，且將圓：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 分成大、小兩弓形，當 L 的斜率改變時，兩弓形的面積亦隨之改變。當直線 L 的斜率為________時，小弓形的面積為最小。（化為最簡分數）

答：$\frac{1}{2}$（108 課綱第一冊第二章圓）

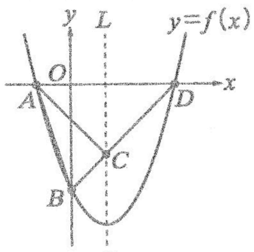
解：圓$(x-1)^2+(y-2)^2=9$，圓心$O(1,2)$，半徑$r=3$

斜率$m_{OA}=\frac{-2}{1}$，L斜率$=\frac{1}{2}$時，小弓形面積最小

14. 將地面看成坐標平面，有一拋物線形道路符合二次函數$f(x)=x^2-2x-3$，其圖形交x軸負向於A點、交y軸於B點，又C點為$y=f(x)$圖形對稱軸上的動點。有甲、乙兩人分別在A、B兩點上，今兩人相約在C點見面，當兩人走到C點的距離和是最小時，此時$\angle ACB$的內部（不含邊界）可用二元一次不等式$\begin{cases} x+ay+b<0 \\ x+cy+d<0 \end{cases}$表示，則$a+b+c+d=$________。

答：-2（108 課綱第一冊第三章二次函數）

解：



令$f(x)=x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1$或$3 \Rightarrow A(-1,0)$，$D(3,0)$

$f(0)=-3 \Rightarrow B(0,-3)$

$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4 \Rightarrow$對稱軸$L$：$x=1$

A點關於對稱軸L的對稱點為D

當C點為$\overline{BD}$與L的交點時，兩人走到C點的距離和$\overline{AC}+\overline{BC}$會最小

$m_{BD}=\frac{0-(-3)}{3-0}=1$ $\therefore \overleftrightarrow{BD}$：$x-y-3=0$

再令$x=1$代入，得$y=-2$ $\therefore C(1,-2)$

$m_{AC}=\frac{0-(-2)}{-1-1}=-1$ $\therefore \overleftrightarrow{AC}$：$x+y+1=0$

故$\angle ACB$的內部（不含邊界）：$\begin{cases} x-y-3<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$

再比較係數得$a+b+c+d=-2$

15. 化簡$\frac{2023^2}{2022}-\frac{2022^2}{2023}-\frac{1}{2022\times 2023}=$________。

答：3（108 課綱第一冊第一章因式分解）

解：所求$=\frac{2023^3-2022^3-1}{2022\times 2023}=\frac{1^3+3\times 2023\times 2022\times 1-1}{2022\times 2023}=3$

16. 不等式$|x|>x^2-6$的解為________。

答：$-3<x<3$（108 課綱第一冊第三章不等式）

解：當 $x\geq 0$，$x>x^2-6 \Rightarrow (x-3)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<3$，取 $0\leq x<3$

當 $x<0$，$-x>x^2-6 \Rightarrow (x+3)(x-2)<0 \Rightarrow -3<x<2$，取 $-3<x<0$

綜合上述：$-3<x<3$

17.設三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 2、除以 $x+2$ 的餘式也是 2，又 $f(x)$ 的常數項是 -6，則 $f(x)$ 的所有係數和為________。

答：-1（108 課綱第一冊第三章多項式）

解：$f(x)=(x-2)^2(ax+b)+2$

$f(-2)=16(-2a+b)+2=2$ 且 $f(0)=4(b)+2=-6$

$\Rightarrow b=-2$，$a=-1$，則 $f(1)=1\times(-1-2)+2=-1$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

18-20 題為題組（108 課綱第一冊第三章三次函數）

某製造公司採接單製造方式營運，因受疫情影響及產業競爭下，導致營運出現每月虧損 500 萬元，公司調查資料如下：每月接單生產數量 x（萬個）與總成本 C（千萬元）的關係，如下表。

x（萬個）	1	2	3
C（千萬元）	3	5	13
當 $0\leq x\leq 5$ 時，C 恰為 x 的三次函數；點 $(1,3)$ 為三次函數 C 的對稱中心。			

根據上述，試回答下列問題。

18.當 $0\leq x\leq 5$ 時，$C=ax^3+bx^2+cx+d$，試求 a、b、c、d 值。

答：$a=1$，$b=-3$，$c=4$，$d=1$

解：$C=a(x-1)^3+p(x-1)+3 \begin{cases} \text{過}(2,5)\Rightarrow a+p+3=5 \\ \text{過}(3,13)\Rightarrow 8a+2p+3=13 \end{cases}$

$\Rightarrow a=1$，$p=1$，$C=(x-1)^3+(x-1)+3=x^3-3x^2+4x+1$

19.(1)若公司停止接單（即 $x=0$）時，就無收入，而總成本就只剩固定成本（指無關生產量但必須花費的成本，如行政費……等），請問公司每月虧損多少元？

(2)若老闆堅持繼續營運，照顧員工生計，但公司接單方式有以下兩個方案：

方案 A：繼續接單（每月虧損 500 萬元）

方案 B：停止接單。

請問哪一個方案對公司較好（虧損少）？（請詳細說明理由）

答：(1)1千萬元　(2)方案 A

解：(1)當 $x=0$，$C=1$，表虧損1千萬元

(2)若繼續接單，則虧損 500 萬元

20.（承 18.題）下列哪些函數的圖形可經適當平移後和 $C=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形重合？（多選題）

(1) x^3+x+3　(2) x^3+x　(3) x^3-x　(4) x^3-x-3　(5) $-x^3-x-3$。

答：(1)(2)