數學考科解析

考試日期：111 年 8 月 5~6 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	14-1	14-2
3	2	3	4	2	1	345	1235	234	13	13	1235	5	2	—
14-3	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19-1	20				
1	5	8	6	3	3	—	1	4	8					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. $C:(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，

圓心 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，半徑 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

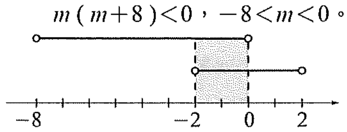
因為 $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 為圓 C 的直徑，所以 $y=mx$ 通過圓心，

$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 代入 $y=mx$，$-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}$，$m=1$，

故選(3)。

2. (Ⅰ) 因為 $-x^2-2x-2<mx+m$ 恆成立，
$x^2+(m+2)x+(m+2)>0$ 恆成立 $\Rightarrow D<0$，
所以 $(m+2)^2-4(m+2)<0$，
$(m+2)(m-2)<0$，$-2<m<2$。

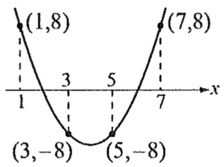
(Ⅱ) 因為 $mx+m<x^2-2x+1$ 恆成立，
$x^2+(-m-2)x+(-m+1)>0$ 恆成立 $\Rightarrow D<0$，
所以 $(-m-2)^2-4(-m+1)<0$，
$m(m+8)<0$，$-8<m<0$。



由(Ⅰ)(Ⅱ)得 $-2<m<0$，故滿足的整數 m 只有 -1，
故選(2)。

3. $x=\log N\Rightarrow \log x=\log(\log N)=111$，
所以 $x=10^{111}$，即 $10^{111}=\log N\Rightarrow N=10^{10^{111}}$，
所以 N 為 $10^{111}+1$ 位數，
故選(3)。

4. 因為 $f(x)$ 有最小值，由圖形判斷可得
$f(1)=f(7)=8$，$f(3)=f(5)=-8$，
所以 $y=f(x)$ 頂點 x 坐標為 $\frac{1+7}{2}=4$



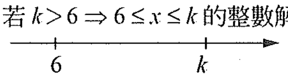
$\Rightarrow$ 可令 $f(x)=a(x-4)^2+k$

$\Rightarrow\begin{cases}f(1)=9a+k=8\\ f(3)=a+k=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ k=-10\end{cases}$，

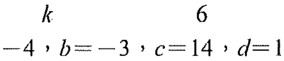
所以 $f(x)=2(x-4)^2-10$，
因為 $f(x-6)=2(x-10)^2-10$，
所以最小值為 -10，
故選(4)。

5. (Ⅰ) 顯然 $x=1$ 符合此不等式

(Ⅱ) 若 $x\neq 1$，又 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ 恆正
$\Rightarrow$ 與 $(x-k)(x-6)\leq 0$ 有相同的解
① $k=1$ 或 6，顯然不合
② 若 $k>6\Rightarrow 6\leq x\leq k$ 的整數解有 9 個 $\Rightarrow 14\leq k<15$



③ 若 $k<6\Rightarrow k\leq x\leq 6$ 且 $x\neq 1$ 的整數解有 9 個
$\Rightarrow -4<k\leq -3$



所以 $a=-4$，$b=-3$，$c=14$，$d=15$，
$\Rightarrow(-4)+(-3)+14+15=22$，
故選(2)。

6. 設 $y=f(x)=(x-2)^2\cdot q(x)+ax+b$
$\Rightarrow x\cdot f(x)=x\cdot(x-2)^2\cdot q(x)+ax^2+bx$，
考慮 ax^2+bx 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $(b+4a)x-4a$

$\Rightarrow\begin{cases}b+4a=3\\ -4a=-4\end{cases}$，所以 $a=1$，$b=-1$，

故選(1)。

二、多選題

7. (1) ×：$0.\dot{2}+0.\dot{8}=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}=\frac{10}{9}$。

(2) ×：$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，$100\div 6=16\cdots 4$，
$\frac{1}{7}$ 小數點後第 100 位數字為 8。

(3) ○：分母的質因數只有 5，故可化成有限小數。

(4) ○：因為 $\frac{3x+2y}{5}<\frac{2x+3y}{5}$，所以 $\frac{3x+2y}{6}<\frac{2x+3y}{6}$。

(5) ○：$|x|+|y|=|x|+|-y|\geq|x+(-y)|$。

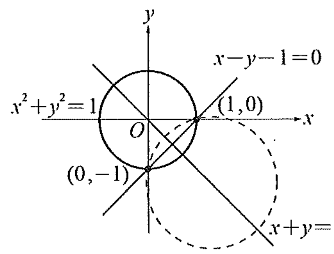
故選(3)(4)(5)。

8. (1) ○：$(x^2+y^2-1)+k\times(x-y-1)=0$
所以 $(1,0),(0,-1)$ 代入 Γ 可得 0。

(2) ○：$D=k^2+(-k)^2-4(-k-1)=2(k+1)^2+2>0$。

(3) ○：當 $k=-1$ 時，半徑有最小值為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，
面積最小值為 $\frac{\pi}{2}$。

(4) × (5) ○：如下圖，$x+y=0$ 不可能為 Γ 的切線，
Γ 的圓心在 $x+y=0$ 上。



故選(1)(2)(3)(5)。

9. (1) ×：若 $k=0$，則直線 L 沒有斜率。

(2) ○：$y=0$ 代入 $\Rightarrow x=2-k$。

(3) ○：整理直線 L 的方程式可得 $x-2=-k(y+1)$。

(4) ○：因為 $(x_0+ky_0-2+k)(3-k-2+k)>0$，
所以點 (x_0,y_0) 與點 $(3,-1)$ 在 L 的同側。

(5) ×：$x+ky=2-k$
$\Rightarrow$ 直線與兩坐標軸交點為 $(2-k,0)$ 和
$(0,\frac{2-k}{k})$，且三角形面積為 3

$\Rightarrow\frac{1}{2}|2-k||\frac{2-k}{k}|=3\Rightarrow|\frac{k^2-4k+4}{k}|=6$。

Case 1：$\frac{k^2-4k+4}{k}=6\Rightarrow k^2-10k+4=0$

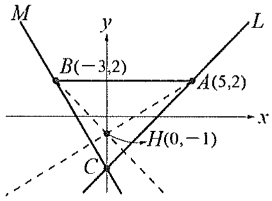
$\Rightarrow k=\frac{10\pm\sqrt{84}}{2}=5\pm\sqrt{21}$。

Case 2：$\dfrac{k^2-4k+4}{k}=-6 \Rightarrow k^2+2k+4=0$。

因為 $D<0$，所以 k 無實數解 $\Rightarrow$ 只有 2 個 k 滿足題意。

故選(2)(3)(4)。

10. (1) ○：如圖，過 A 點作直線 $L\perp \overleftrightarrow{BH}$，過 B 點作直線 $M\perp \overleftrightarrow{AH}$ $\Rightarrow L$ 與 M 的交點為三角形的頂點 C。



(2) ×：因為垂心 H 在△ABC 內部，所以△ABC 為銳角三角形。

(3) ○：因為 $\overleftrightarrow{AB}$ 為水平線，垂心 H 在 y 軸上，所以 C 點在 y 軸上。

(4) ×：因為 $\overleftrightarrow{BH}$ 斜率為 -1，所以直線 L 方程式為 $y-2=1(x-5)$，因為 $\overleftrightarrow{AH}$ 斜率為 $\dfrac{3}{5}$，

所以直線 M 方程式為 $y-2=\dfrac{-5}{3}(x+3)$

$\Rightarrow C$ 點坐標為 $(0,-3)$，當過 $C(0,-3)$，k 有最大值為 $0-2\times(-3)=6$。

(5) ×：當過 $B(-3,2)$，k 有最小值為 $-3-2\times 2=-7$

$\Rightarrow -7\le k\le 6 \Rightarrow$ 滿足條件之整數 k 有 14 個。

故選(1)(3)。

11. (1) ○：設直線 PO 交 x 軸於 D 點，因為直線 PO 是 $\angle APB$ 的角平分線，所以 $\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AD}:\overline{DB}$，又 D 點坐標為 $(-3,0)$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{DB}=7:\dfrac{7}{2}=2:1$。

(2) ×：A 到直線 PO 的距離為 $\dfrac{|-10-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$。

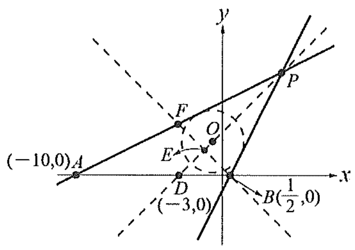
(3) ○：過 B 作直線 PO 的垂直線 $\overleftrightarrow{BE}$ 交 $\overleftrightarrow{PA}$ 於 F 點

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE}$ 方程式為 $x+y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow E$ 點坐標為 $(-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4})$

$\Rightarrow B$ 點關於直線 PO 的對稱點 F 的坐標為 $(-3,\dfrac{7}{2})$。

(4) ×：因為 B 點關於直線 PO 的對稱點 F 會落在 $\overleftrightarrow{PA}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{PA}$ 方程式為 $x-2y=-10$，P 點為 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PO}$ 交點 $\Rightarrow P$ 點坐標為 $(4,7)$。

(5) ×：檢查 $(-1,2)$ 到 x 軸的距離 $\neq(-1,2)$ 到直線 $\overleftrightarrow{PA}$ 的距離。



故選(1)(3)。

12. (1) ○：$x=0$ 代入 $\Rightarrow y=f(x)$ 過點 $(0,c)$，由圖知 $\Rightarrow c>0$。

(2) ○：由圖知，在 $x=-1$ 的一次近似直線斜率為正 $\Rightarrow m>0$。

(3) ○：由圖知，$ax^2+bx+c=0$ 無實數解

$\Rightarrow b^2-4ac<0$，又 $a>0$，所以 ax^2+bx+c 恆正

$\Rightarrow$ 不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 無實數解。

(4) ×：$y=f(x)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$，

因為對稱中心 P 點的 x 坐標為正，

所以 $-\dfrac{a+b}{3a}>0$，又 $a>0 \Rightarrow a+b<0 \Rightarrow b<0$。

(5) ○：承(4)，$-\dfrac{a+b}{3a}>0 \Rightarrow -\dfrac{b}{3a}>\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{3a}\times\dfrac{3}{2}>\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}$，即 $-\dfrac{b}{2a}>\dfrac{1}{2}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

三、選填題

13. $\sqrt{4-\sqrt{25-2\sqrt{24}}}=\sqrt{4-(\sqrt{24}-1)}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

$a=3$，$b=2 \Rightarrow a+b=5$。

14. 如圖，$x-y+1=0$ 斜率為 1

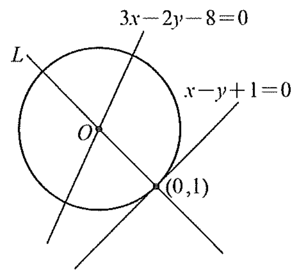
$\Rightarrow L：y-1=(-1)\times(x-0)$，

$x+y-1=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x-2y-8=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$，

所以圓心為 $(2,-1)$。



15. (Ⅰ) 令 $h(x)=(x-3)q(x)+1$

$\Rightarrow g(x)=(x-2)h(x)+2$

$=(x-2)[(x-3)q(x)+1]+2$

$=(x-2)(x-3)q(x)+(x-2)+2$，

又 $f(x)=(x-1)g(x)+3$

$=(x-1)[(x-2)(x-3)q(x)+(x-2)+2]+3$

$=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+(x-1)(x-2)+2(x-1)+3$，

(Ⅱ) $xf(x)$

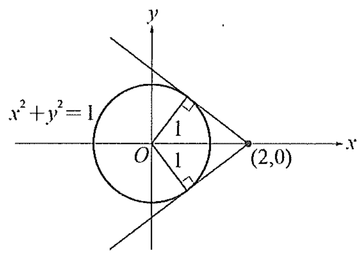
$=x(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+x(x-1)(x-2)+2x(x-1)+3x$

$=x(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+(x-1)(x-2)(x-3)+3(x-1)(x-2)+2x(x-1)+3x$

$\Rightarrow$ 所求為 $3(x-1)(x-2)+2x(x-1)+3x$

$=5x^2-8x+6$。

16. 設 $m=\dfrac{y-0}{x-2}$ 代表 (x,y) 和 $(2,0)$ 的斜率，



$L：y-0=m(x-2)$，$mx-y-2m=0$，

如圖，當 L 與圓相切時，

$\dfrac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，$|-2m|=\sqrt{m^2+1}$，

$4m^2=m^2+1$，$m^2=\dfrac{1}{3}$，$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\dfrac{y}{x-2}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{y}{x-2}$ 的最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

17. (Ⅰ) 因為$f(-2-\alpha)=4-\beta$，

所以$(\frac{\alpha+(-2-\alpha)}{2},\frac{\beta+4-\beta}{2})$為$y=f(x)$之對稱中心

$\Rightarrow h=-1$，$k=2$。

即$f(x)=a(x+1)^3+p(x+1)+2$。

(Ⅱ) $y=f(x)$圖形恰通過兩個象限$\Rightarrow y=f(x)$圖形必過$(0,0)$

$\Rightarrow 0=a(0+1)^3+p(0+1)+2$，所以$a+p=-2$

$\Rightarrow a+h+p+k=-2+(-1)+2=-1$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $2\le|x-10|\le t$，

故選(4)。

19. $2\le|x-10|\le 5$，

$2\le x-10\le 5$或$-5\le x-10\le -2$，

$12\le x\le 15$或$5\le x\le 8$，

$x=5,6,7,8,12,13,14,15$，共8個。

20. $2\le|x-10|\le t$，(1分)

$2\le x-10\le t$或$-t\le x-10\le -2$，

$12\le x\le t+10$或$10-t\le x\le 8$，(1分)

因為$x=7,8,12,13$，

所以$\begin{cases}13\le t+10<14\\6<10-t\le 7\end{cases}$ (2分)

$\Rightarrow\begin{cases}3\le t<4\\3\le t<4\end{cases}$，$3\le t<4$。(1分)