全國高中 112 年(111 學年度)
高三上 第一次學測模擬考數學試題（108 課綱第一冊）

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 有一圓 C：$x^2+y^2+x+y=0$ 和一直線 $y=mx$ 交於 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=\sqrt{2}$，則 m 的值為下列哪一個選項？
(1) $-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{1}{4}$　(3) 1　(4) $\frac{1}{2}$　(5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

答：(3)　（108 課綱第一冊第二章圓）

解：C：$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，圓心 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半徑 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

因為 $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 為圓 C 的直徑，所以 $y=mx$ 通過圓心，

$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 代入 $y=mx$，$-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}$，$m=1$

2. 對任何實數 x，不等式 $-x^2-2x-2<mx+m<x^2-2x+1$ 恆成立，則滿足此一條件的整數 m 值有多少個？
(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個。

答：(2)　（108 課綱第一冊第三章二次函數）

解：(I)因為 $-x^2-2x-2<mx+m$ 恆成立，亦即 $x^2+(m+2)x+(m+2)>0$ 恆成立

條件為 $D=(m+2)^2-4(m+2)<0 \Rightarrow (m+2)(m-2)<0 \Rightarrow -2<m<2$

(II)同時 $mx+m<x^2-2x+1$ 恆成立，亦即 $x^2+(-m-2)x+(-m+1)>0$ 恆成立

條件為 $D=(-m-2)^2-4(-m+1)<0 \Rightarrow m(m+8)<0 \Rightarrow -8<m<0$

由(I)(II)得 $-2<m<0$，故滿足的整數 m 只有 -1

3. 對某數 N 取一次 log 後，其值為 x，再對 x 取一次 log 後，其值為 111，試問 N 是幾位數？
(1) $111+1$ 位　(2) 10^{111} 位　(3) $10^{111}+1$ 位　(4) $10^{10^{111}}$ 位　(5) $10^{10^{111}}+1$ 位。

答：(3)　（108 課綱第一冊第一章對數）

解：$x=\log N \Rightarrow \log x=\log(\log N)=111$，

所以 $x=10^{111}$，即 $10^{111}=\log N \Rightarrow N=10^{10^{111}}$，所以 N 為 $10^{111}+1$ 位數

4. 已知 $f(x)$ 為二次函數，若 $f(x)$ 有最小值且 $|f(1)|=|f(3)|=|f(5)|=|f(7)|=8$，則 $f(x-6)$ 有最小值為何？
(1) -16　(2) -14　(3) -12　(4) -10　(5) -8。

答：(4)　（108 課綱第一冊第三章二次函數）

解：因為 $f(x)$ 有最小值，表開口向上

且 $f(1)=f(7)=8$，$f(3)=f(5)=-8$，

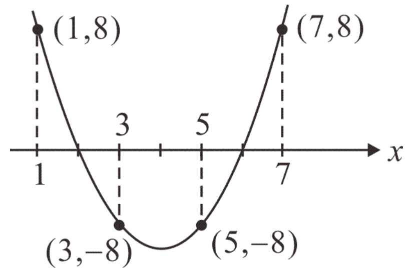
故 $y=f(x)$對稱軸 $x=\dfrac{1+7}{2}=4$

令 $f(x)=a(x-4)^2+k$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1)=9a+k=8 \\ f(3)=a+k=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ k=-10 \end{cases}$

則 $f(x)=2(x-4)^2-10$，

故 $f(x-6)=2(x-10)^2-10$，所以最小值為-10



5. 已知存在實數k使得滿足不等式$(x-k)(x-6)(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)\le 0$的整數解$x$有10個，若$k$的範圍為$a<k\le b$或$c\le k<d$，則$a+b+c+d=$？
(1) 20　(2) 22　(3) 24　(4) 26　(5) 28。

答：(2)　（108 課綱第一冊第三章不等式）

解：$(x-k)(x-6)(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)\le 0 \xrightarrow{x^2+2x+3\text{恆正}} (x-k)(x-6)\le 0$或$x=1$

當整數解為：$1,6,7,8,9,10,11,12,13,14 \Rightarrow 14\le k<15$

當整數解為：$6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3 \Rightarrow -4<k\le -3$

所以 $a=-4$，$b=-3$，$c=14$，$d=15$　$\Rightarrow (-4)+(-3)+14+15=22$

6. 已知多項式$x\cdot f(x)$的圖形在$x=2$附近的一次近似為$y=3x-4$，則$y=f(x)$的圖形在$x=2$附近的一次近似為何？
(1) $y=x-1$　(2) $y=x-2$　(3) $y=3x-2$　(4) $y=3x-5$　(5) $y=8x-12$。

答：(1)　（108 課綱第一冊第三章三次函數）

解：設 $f(x)=a_n(x-2)^n+\ldots+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$

則 $x\cdot f(x)=a_nx(x-2)^n+\ldots+a_2x(x-2)^2+a_1x(x-2)+a_0x$

故 $a_1x(x-2)+a_0x$除以$(x-2)^2$的餘式為$(2a_1+a_0)x-4a_1=3x-4$

故 $a_1=1$、$a_0=1 \Rightarrow y=f(x)$在$x=2$處的一次近似為 $y=a_1(x-2)+a_0=x-1$

二、多選題（占 30 分）

7. 下列關於實數的敘述哪些是正確的？
(1) $0.\overline{2}+0.\overline{8}=1$　(2) $\dfrac{1}{7}$的小數點後第100位數字為5
(3) 5^{-100}可化成有限小數　(4)若x、y為實數且$x<y$，則$\dfrac{3x+2y}{6}<\dfrac{2x+3y}{6}$
(5)若x、y為實數，則$|x|+|y|\ge|x-y|$。

答：(3)(4)(5)　（108 課綱第一冊第一章有理數、實數）

解：(1) ×：$0.\overline{2}+0.\overline{8}=\dfrac{2}{9}+\dfrac{8}{9}=\dfrac{10}{9}$

(2) ×：$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，而$100=6\times16+4$，故$\frac{1}{7}$小數點後第100位數字為8

(3) ○：$5^{-100}=\frac{1}{5^{100}}=\frac{2^{100}}{10^{100}}$，可化成有限小數

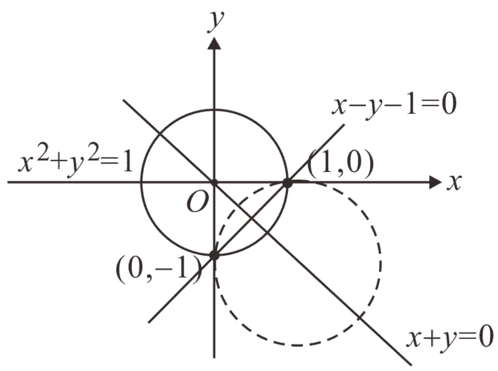
(4) ○：因為$\frac{3x+2y}{5}<\frac{2x+3y}{5}$，所以$\frac{3x+2y}{6}<\frac{2x+3y}{6}$

(5) ○：$|x|+|y|=|x|+|-y|\geq|x+(-y)|$

8. 有一方程式Γ：$x^2+y^2+kx-ky-k-1=0$，試選出正確的選項。
(1)Γ的圖形必通過$(1,0)$和$(0,-1)$　　(2)Γ的圖形一定是圓
(3)Γ圖形的面積的最小值為$\frac{\pi}{2}$　　(4)$x+y=0$可能為Γ的切線
(5)Γ圖形的圓心必在$y=-x$上。

答：(1)(2)(3)(5)　（108 課綱第一冊第二章圓）

解：$(x^2+y^2-1)+k\times(x-y-1)=0$



$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-1=0\\x-y-1=0\end{cases}$交於$(1,0)$，$(0,-1)$

表圓$x^2+y^2=1$與$x-y=1$所成之圓族，
故Γ圖形的圓心必在$x+y=0$上

則Γ：$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{2}+k+1$

$=\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$

當$k=-1$時，半徑有最小值為$\frac{\sqrt{2}}{2}$，面積最小值為$\frac{\pi}{2}$

9. 已知直線L的方程式為$x+ky=2-k$，k為實數，試選出正確的選項。
(1)直線L的斜率為$-\frac{1}{k}$
(2)直線L的x截距為$2-k$
(3)不論k為何值，L必過$(2,-1)$
(4)若$x_0+ky_0>2-k$，則不論k為何值，點(x_0,y_0)與點$(3,-1)$在L的同側
(5)若L與兩坐標軸所圍的三角形面積為3，則滿足條件之直線L有三條。

答：(2)(3)(4)　（108 課綱第一冊第二章直線）

解：(1) ×：若$k=0$，則直線L沒有斜率
(2) ○：$y=0$代入 $\Rightarrow x=2-k$
(3) ○：整理直線L的方程式可得$x-2=-k(y+1)$，L必過$(2,-1)$
(4) ○：因為$(x_0+ky_0-2+k)(3-k-2+k)>0$，
所以點(x_0,y_0)與點$(3,-1)$在L的同側

(5) ×：$x+ky=2-k$

$\Rightarrow$ 直線與兩坐標軸交點為 $(2-k,0)$ 和 $\left(0,\dfrac{2-k}{k}\right)$，且三角形面積為 3

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|2-k|\left|\frac{2-k}{k}\right|=3 \quad \Rightarrow \left|\frac{k^2-4k+4}{k}\right|=6$$

Case 1：$\dfrac{k^2-4k+4}{k}=6 \quad \Rightarrow k^2-10k+4=0 \Rightarrow k=\dfrac{10\pm\sqrt{84}}{2}=5\pm\sqrt{21}$

Case 2：$\dfrac{k^2-4k+4}{k}=-6 \quad \Rightarrow k^2+2k+4=0$，因為 $D<0$，k 無實數解

$\Rightarrow$ 只有 2 個 k 滿足題意

10. 已知 ΔABC 的垂心 H 坐標為 $(0,-1)$，且其中兩頂點 A、B 坐標分別為 $(5,2)$、$(-3,2)$，若直線 $x-2y=k$ 與 ΔABC 相交，試選出正確的選項。
(1) H 在 ΔABC 內部　(2) ΔABC 為鈍角三角形　(3) C 點在 y 軸上
(4)滿足條件的 k 之最大值為 1　(5)滿足條件之整數 k 有 13 個。

答：(1)(3)　（108 課綱第一冊第二章直線）

解：設 $C(x,y)\Rightarrow\begin{cases}\overline{AH}\perp\overline{BC}\Rightarrow \dfrac{3}{5}\times\dfrac{y-2}{x+3}=-1\\ \overline{BH}\perp\overline{AC}\Rightarrow \dfrac{3}{-3}\times\dfrac{y-2}{x-5}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$，在 y 軸上

垂心 H 在 ΔABC 內部，所以 ΔABC 為銳角三角形

$x-2y=k$ 過 $C(0,-3)\Rightarrow k=6$、過 $A(5,2)\Rightarrow k=1$、過 $B(-3,2)\Rightarrow k=-7$

故 $-7\le k\le 6 \quad \Rightarrow$ 滿足條件之整數 k 有 14 個

11. 已知圓 C 外一點 P 對圓作兩切線，若兩切線與 x 軸的交點坐標分別為 $A(-10,0)$、$B\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，且 O 為圓 C 的圓心，直線 PO 的方程式為 $x-y=-3$。試選出正確的選項。
(1) $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$　(2) A 到直線 PO 的距離為 $\dfrac{13}{2}\sqrt{2}$
(3) B 點關於直線 PO 的對稱點坐標為 $\left(-3,\dfrac{7}{2}\right)$　(4) P 點坐標為 $\left(\dfrac{7}{2},7\right)$
(5)若圓 C 恰為 ΔPAB 之內切圓，則圓心 O 的坐標為 $(-1,2)$。

答：(1)(3)　（108 課綱第一冊第二章圓）

解：(1) ○：設直線 PO 交 x 軸於 D 點，因為直線 PO 是 $\angle APB$ 的角平分線，

所以 $\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AD}:\overline{DB}$，又 D 點坐標為 $(-3,0)$

$$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{DB}=7:\frac{7}{2}=2:1$$

(2) ×：A 到直線 PO 的距離為 $\dfrac{|-10-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$

(3) ○：過 B 作直線 PO 的垂直線 $\overleftrightarrow{BE}$ 交 $\overleftrightarrow{PA}$ 於 F 點

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE}$ 方程式為 $x+y=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow E$ 點坐標為 $\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}\right)$

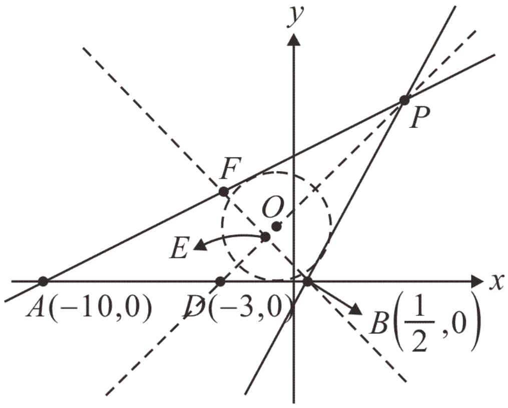
$\Rightarrow B$ 點關於直線 PO 的對稱點 F 的坐標為 $\left(-3,\dfrac{7}{2}\right)$

(4) ×：因為 B 點關於直線 PO 的對稱點 F 會落在 $\overleftrightarrow{PA}$ 上，

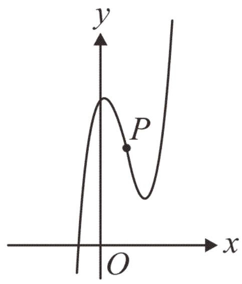
所以 $\overleftrightarrow{PA}$ 方程式為 $x-2y=-10$，P 點為 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PO}$ 交點

$\Rightarrow P$ 點坐標為 $(4,7)$

(5) ×：檢查 $(-1,2)$ 到 x 軸的距離 $\neq(-1,2)$ 到直線 $\overleftrightarrow{PA}$ 的距離



12. 已知 a、b、c 為實數，且三次函數 $y=f(x)=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$ 的圖形如圖所示，若 P 點為 $y=f(x)$ 的對稱中心。試選出正確的選項。



(1) $c>0$

(2) 若 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=-1$ 的一次近似為 $y=mx+k$，則 $m>0$

(3) 不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 無實數解

(4) $b>0$

(5) $y=ax^2+bx+c$ 頂點的 x 坐標大於 $\dfrac{1}{2}$。

答：(1)(2)(3)(5)　（108 課綱第一冊第三章三次函數）

解：(1) ○：$x=0$ 代入 $\Rightarrow y=f(x)$ 過點 $(0,c)$，由圖知 $\Rightarrow c>0$

(2) ○：由圖知，在 $x=-1$ 的一次近似直線斜率為正 $\Rightarrow m>0$

(3) ○：由圖知，$ax^2+bx+c=0$ 無實數解 $\Rightarrow b^2-4ac<0$，

又 $a>0$，所以 ax^2+bx+c 恆正 $\Rightarrow$ 不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 無實數解

(4) ×：$y=f(x)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$，

因為對稱中心 P 點的 x 坐標 $-\dfrac{a+b}{3a}>0 \xrightarrow{a>0} a+b<0 \xrightarrow{a>0} b<0$

(5) ○：承(4)，$-\dfrac{a+b}{3a}>0 \Rightarrow -\dfrac{b}{3a}>\dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{b}{2a}>\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

三、選填題（占 25 分）

13. $\sqrt{4-\sqrt{25-4\sqrt{6}}}$ 的整數部分為 x，小數部分為 y，若 $\dfrac{1}{y}$ 的值為 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，其中 a、b 為整數，則 $a+b$ 的值為________。

答： 5（108 課綱第一冊第一章無理數）

解：$\sqrt{4-\sqrt{25-2\sqrt{24}}}=\sqrt{4-\left(\sqrt{24}-1\right)}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

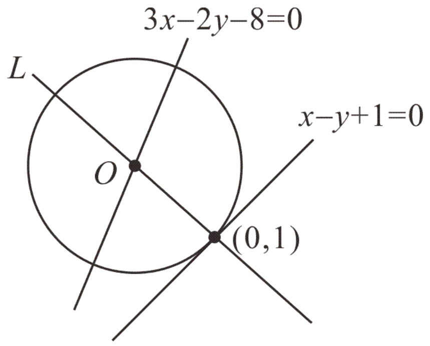
$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，故 $a=3$，$b=2$ $\Rightarrow a+b=5$

14.有一圓和 $x-y+1=0$ 相切且切點為 $(0,1)$，又圓心在 $3x-2y-8=0$ 上，則此圓的圓心為________。

答：$(2,-1)$（108 課綱第一冊第二章圓）

解：圓心在 $x+y-1=0$ 與 $3x-2y-8=0$ 上

故圓心為 $(2,-1)$



15.已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的商式為 $g(x)$，餘式為 3；

$g(x)$ 除以 $x-2$ 的商式為 $h(x)$，餘式為 2；

$h(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 1，

則 $xf(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為________。

答：$5x^2-8x+6$（108 課綱第一冊第三章多項式）

解：$f(x)=(x-1)g(x)+3$

$$\begin{aligned}
&=(x-1)[(x-2)h(x)+2]+3\\
&=(x-1)(x-2)h(x)+2(x-1)+3\\
&=(x-1)(x-2)[(x-3)Q(x)+1]+2(x-1)+3\\
&=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+(x-1)(x-2)+2(x-1)+3
\end{aligned}$$

$xf(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+x(x-1)(x-2)+2x(x-1)+3x$

$xf(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+(x-1)(x-2)(x-3)$

$+\underbrace{3(x-1)(x-2)+2x(x-1)+3x}_{=5x^2-8x+6}$

16. x、y 為實數，$x^2+y^2=1$，則 $\dfrac{y}{x-2}$ 的最大值為________。（化為最簡分數）

答：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（108 課綱第一冊第二章圓）

解：令 $m=\dfrac{y}{x-2}\Rightarrow mx-y-2m=0$

當圓與 $mx-y-2m=0$ 相交 $\Rightarrow \dfrac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+1}}\le 1\Rightarrow |-2m|\le\sqrt{m^2+1}$

$$\Rightarrow 4m^2 \le m^2+1 \Rightarrow m^2 \le \frac{1}{3} \Rightarrow m^2=\frac{1}{3} \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \le m=\frac{y}{x-2} \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

17.已知三次函數 $y=f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 滿足以下兩條件：
(I)若 $f(\alpha)=\beta$，則 $f(-2-\alpha)=4-\beta$ 恆成立；
(II) $y=f(x)$ 圖形恰通過兩個象限。
則 $a+h+p+k=$________。

答： -1（108 課綱第一冊第三章三次函數）
解： (I)因為若 $f(\alpha)=\beta$，則 $f(-2-\alpha)=4-\beta$ 恆成立；

所以 $\left(\frac{\alpha+(-2-\alpha)}{2},\frac{\beta+4-\beta}{2}\right)=(-1,2)$ 為 $y=f(x)$ 之對稱中心

$\Rightarrow h=-1$，$k=2$，即 $f(x)=a(x+1)^3+p(x+1)+2$

(II) $y=f(x)$ 圖形恰通過兩個象限 $\Rightarrow$ $y=f(x)$ 圖形必過 $(0,0)$

$\Rightarrow 0=a(0+1)^3+p(0+1)+2$，所以 $a+p=-2$

$\Rightarrow a+h+p+k=-2+(-1)+2=-1$

第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

第 18 至 20 題為題組

小賴的媽媽家位於數線上 $+10$ 的位置，小賴想買房子，房子的位置須滿足和媽媽家距離至少 2 單位且不超過 t 單位，其中 $t>2$，則：

18.若小賴房子的位置為 x，下列哪一個選項是正確的？（單選題）
(1) $2<x-10<t$　(2) $2\le x-10\le t$　(3) $2<|x-10|<t$
(4) $2\le|x-10|\le t$　(5) $2\le|x-10|<t$。

答： (4) （108 課綱第一冊第一章實數）
解： $2\le|x-10|\le t$，故選(4)

19.承上題，若 $t=5$ 且 x 為整數，則 x 的值有________個。

答： 8（108 課綱第一冊第一章實數）
解： $2\le|x-10|\le 5 \Rightarrow 12\le x\le 15$ 或 $5\le x\le 8$，x 為整數
$x=5,6,7,8,12,13,14,15$，共 8 個

20.承 19.題，若滿足不等式的整數解 x 有 4 個，則 t 的範圍為何？

答： $3\le t<4$（108 課綱第一冊第一章實數）
解： $2\le|x-10|\le t \Rightarrow 12\le x\le t+10$ 或 $10-t\le x\le 8$
滿足不等式的整數解 x 有 4 個，則 $x=7,8,12,13$

所以 $\begin{cases}13\le t+10<14\\6<10-t\le 7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\le t<4\\3\le t<4\end{cases} \Rightarrow 3\le t<4$