全國公私立高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：111 年 8 月 2~3 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
5	1	5	3	2	3	245	15	45	234	15	34	2	0	5
14-1	14-2	14-3	14-4	15-1	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	17-3	18-1	18-2	18-3	18-4
—	3	—	4	5	2	1	2	1	7	2	—	1	3	2
18-5	18-6	19	20											
4	5													

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 設 $P(x,y)$ 為圓上的動點，圓心 $(-1,2)$ 為 O，$(2,6)$ 為 A，
則 $\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}=\overline{PA}$，
因為 $\overline{OA}=\sqrt{(2+1)^2+(6-2)^2}=5>$ 半徑 3，故 A 在圓外，
所以，最大值 $M=5+3=8$，最小值 $m=5-3=2$，
所求 $\dfrac{M}{m}=\dfrac{8}{2}=4$，
故選(5)。

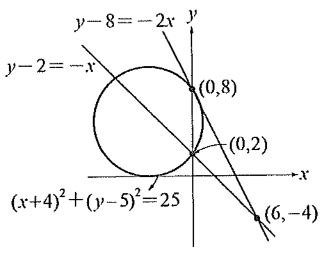
2. $a=28^x=42^y=63^z \Rightarrow 28=a^{\frac{1}{x}}$、$42=a^{\frac{1}{y}}$、$63=a^{\frac{1}{z}}$
$\Rightarrow a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=28\times42\times63$
$\Rightarrow a^3=(2\times3\times7)^3$，所以 $a=42$，
故選(1)。

3. 由題意知，$\dfrac{q}{1000}=10^{10p}$，$q=10^{10p+3}$，
$\log q=8p^2$，$\log 10^{10p+3}=10p+3=8p^2$，
解得 $p=\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}$（不合），可得 $q=10^{18}$，故 q 為 19 位數，
故選(5)。

4. 由題意知 $f(0)=2$，$x=0$ 代入可得 $f(1)-f(0)=28$，
可得所求 $f(1)=30$，
故選(3)。

5. 先設 $-\dfrac{1}{2}x+1=t \Rightarrow x=-2t+2$，
可得 $f(t)>0$ 的解為 $-2<-2t+2<-1$ 或 $-2t+2>1$，
即 $2>t>\dfrac{3}{2}$ 或 $t<\dfrac{1}{2}$，
也就是 $f(x)>0$ 的解為 $x<\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}<x<2$，
若 $f(3x-2)>0$，可得 $3x-2<\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}<3x-2<2$，
即 $x<\dfrac{5}{6}$ 或 $\dfrac{7}{6}<x<\dfrac{4}{3}$，
今 $f(3x-2)<0$ 的解即為 $\dfrac{5}{6}<x<\dfrac{7}{6}$ 或 $x>\dfrac{4}{3}$，
所求為 $6-5+6-7+3-4=-1$，
故選(2)。

6. $x^2+y^2+8x-10y+16=0$ 配方可得圓的標準式為
$(x+4)^2+(y-5)^2=5^2$，圓心 $(-4,5)$，半徑為 5，
且此圓與 y 軸交於
$(0,2)$ 與 $(0,8)$ 兩點，
又此直線必過 $(6,-4)$，
畫出相對位置後，
找出符合題意所求
直線斜率 m，
如下圖所示，
所以 $-2<m<-1$，
故選(3)。



二、多選題

7. $x=2-\sqrt{3} \Rightarrow x^{-1}=2+\sqrt{3}$，
(1) ×：$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=4+2=6$
$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$。
(2) ○：$x+x^{-1}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$。
(3) ×：$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$
$=(\sqrt{6})^3-3\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$。
(4) ○：$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=4^2-2=14$。
(5) ○：$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})=4^3-3\times4=52$。
故選(2)(4)(5)。

8. 將 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 後可得 $f(x)=(x^2+ax+1)[x+(2-a)]$，
因為整除，可得 $a=3$ 或 -1，$k=2-a$。
但 $a=-1$ 會使 $g(x)=0$ 與 x 軸無交點。
故 $a=3$，$k=-1$。
(1) ○：配方 $g(x)=(x+\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{5}{4}$，頂點坐標為 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{4})$。
(2) ×：代入 $k=-1$，
可得 $f(x)=x^3+2x^2-2x-1$，$f(0)=-1$。
(3) ×：將 $f(x)$ 配方成標準式 $f(x)=a(x-s)^3+p(x-s)+t$，
對稱中心為 (s,t)，$s=-\dfrac{2}{3\times1}=-\dfrac{2}{3}$。
(4) ×：可因式分解 $f(x)=(x-1)(x^2+3x+1)$。
(5) ○：因 $y=f(x)=(x-1)(x^2+3x+1)=0$ 的解為
$1,\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，故為一正數、兩負數。
故選(1)(5)。

9. 由於 $(x+1)$ 與 $(x+2)$ 差 1，
所以 $-28=1\times2\times(-14)=(-2)\times(-1)\times(-14)$，
可得 $\begin{cases}x+1=1\\x+k=-14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\k=-14\end{cases}$
或 $\begin{cases}x+1=-2\\x+k=-14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-3\\k=-11\end{cases}$，
故選(4)(5)。

10. 由題意知 $y=f(x)$ 的圖形開口向上或向下，且與 x 軸無交點。
(1) ×：不確定 $f(0)$ 之正負。
(2) ○：若開口往上，則 $f(111)>0$，$f(112)>0$
$\Rightarrow f(111)\times f(112)>0$；
若開口往下，則 $f(111)<0$，$f(112)<0$
$\Rightarrow f(111)\times f(112)>0$。
(3) ○：若 $f(x)-1=0$ 有實根，
表示 $y=f(x)$ 的圖形開口向上，
則 $f(x)-2=0$ 有實根是正確的。
(4) ○：因 $f(x)=0$ 沒有實根，
則 $y=f(x-113)$ 即 $y=f(x)$ 右移 113 單位，
也會沒有實根。

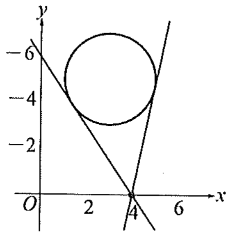
(5) ×：若$f(x)-1=0$有兩相異實根，
表示$y=f(x)$的圖形開口向上，
$y=f(x-110)-\frac{1}{2}$為$y=f(x)-1$的圖形
右移 110 單位且上移$\frac{1}{2}$，所以可能沒有實根。
(反例：$f(x)=x^2+0.6$。)

故選(2)(3)(4)。

11. 圓 C 的標準式為$(x-3)^2+(y-5)^2=4$，
設通過P且與圓C相切的直線方程式為$y=m(x-4)$，
即$mx-y-4m=0$，

圓心與切線的距離為$\frac{|3m-5-4m|}{\sqrt{m^2+1^2}}=2$

$\Rightarrow m=\frac{5\pm 2\sqrt{22}}{3}$，如圖，



故與圓C有兩相異交點的斜率為

$m<\frac{5-2\sqrt{22}}{3}\approx -1.46$

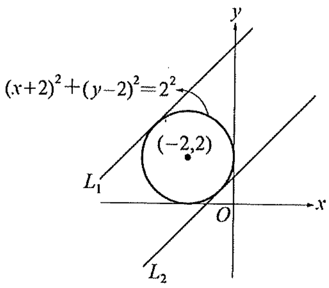
或$m>\frac{5+2\sqrt{22}}{3}\approx 4.79$，

故選(1)(5)。

12. 因圓心(a,b)落在$x+y=0$上，且此圓與L_1, L_2相切，
又與兩軸相切，如下圖所示，$a=-b$，$b>0$，

$2r=2b=\frac{|(4+2\sqrt{2})-(4-2\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\Rightarrow b=2$，$a=-2$

$\Rightarrow$圓方程式：$(x+2)^2+(y-2)^2=2^2$。



(1) ×：由圖知，此圓位於第二象限，故圓心位於第二象限。
(2) ×：由圖知，此圓與x軸切於$(-2,0)$。
(3) ○：此圓面積為：$2^2\times\pi=4\pi$。
(4) ○：因$\sqrt{(1+2)^2+(6-2)^2}=5>2$，故$S$點在圓外，
則S到圓的最遠距離為$\overline{SA}+r=5+2=7$。
(5) ×：$\frac{y-6}{x}=\frac{y-6}{x-0}$表示圓上的動點$P(x,y)$到
定點$B(0,6)$的斜率，
則斜率最小值發生在從B點對圓作切線時。
令$\frac{y-6}{x}=m$，$y-6=mx$，$mx-y+6=0$，
利用圓心到切線的距離等於半徑，求出m
$\Rightarrow\frac{|-2m-2+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$，$m=\frac{3}{4}$，

所以最小值為$\frac{3}{4}$。

故選(3)(4)。

三、選填題

13. 考慮$f(x)=3x^3-23x^2+52x-28$，利用綜合除法可得
$f(x)=3(x-3)^3+4(x-3)^2-5(x-3)+2$，
$f(2.99)=3\times(2.99)^3-23\times(2.99)^2+52\times(2.99)-28$
$=3\times(2.99-3)^3+4\times(2.99-3)^2-5(2.99-3)+2$
≈ 2.0504，
答案取 2.05。

14. 由題意知，因A與B點的中點為$(0,0)$，
且A, B兩點的斜率為-2，故對稱軸為$y=\frac{1}{2}x$。
過C, D兩點的直線必與過A, B兩點的直線平行，
則CD直線方程式為$y=-2(x+5)$，
又與對稱軸交點$E(-4,-2)$，
則根據中點公式可得坐標D為$(-3,-4)$。

15. $f(x+1)-f(x)=4x-1$，故$f(x)$為二次多項式，
設$f(x)=ax^2+bx+c$，
$f(x+1)-f(x)=2ax+(a+b)=4x-1$
$\Rightarrow a=2$、$b=-3$，
另外，$f(0)=4\Rightarrow c=4$，
所以多項式$f(x)=2x^2-3x+4$，
故$am+bn+c=2\times 2+(-3)\times 1+4=5$。

16. $10^{\log(2x)}=2x$，$x>0$，

$10^{\log(\frac{1}{2x})}=\frac{1}{2x}$，$x>0$，

所求$2x+\frac{1}{2x}\geq 2\sqrt{(2x)(\frac{1}{2x})}=2=a$，

等號成立時，$2x=\frac{1}{2x}$，$x=\pm\frac{1}{2}$(負不合)，即$t=\frac{1}{2}$，

所以$(a,t)=(2,\frac{1}{2})$。

17. 圓$C\Rightarrow(x-2)^2+(y-8)^2=17$，
故圓C的圓心為$(2,8)$，半徑為$\sqrt{17}$，
而原點與圓 C 圓心的距離為$\sqrt{4+64}=2\sqrt{17}$，
是圓C半徑的兩倍，

故圓K的半徑為$\frac{2\sqrt{17}-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 設$h(t)=at^2+bt+c$，

已知$\begin{cases}h(0)=c=45\\ h(9)=81a+9b+c=36\\ h(15)=225a+15b+c=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}9a+b=-1\\ 15a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$，$b=2$，

故可得$h(t)=\frac{-1}{3}t^2+2t+45$。

19. 由配方法，
$h(t)=\frac{-1}{3}(t^2-6t+3^2)+45+3=\frac{-1}{3}(t-3)^2+48$，(3 分)
因為$0\leq t\leq 15$，當$t=3$，最高是 48(公尺)。(3 分)

20. 令$h(t)=-\frac{1}{3}(t-3)^2+48=21$(1 分)

$\Rightarrow\frac{1}{3}(t-3)^2=27\Rightarrow(t-3)^2=81\Rightarrow t-3=\pm 9$，

$t=12$或-6(2 分)，但$0\leq t\leq 15$，故$t=12$(秒)。(3 分)