全國公私立高級中學114學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

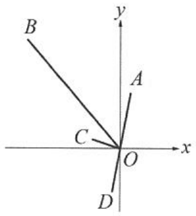
考試日期：113年9月8~9日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
3	4	3	1	5	2	24	13	234	135	145	23	1	2	3
13-4	14-1	14-2	15-1	15-2	16-1	16-2	16-3	16-4	17-1	17-2	17-3	18	19	20
0	2	1	5	2	1	1	3	3	6	4	7	4		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【測驗目標】直線與圓、三角比



【解析】

依題意作圖如右，

知 $m_{AD}>m_{AC}>m_{BA}>m_{BC}$，

即 $m_2>m_1>m_3>m_4$，

故選(3)。

2. 【測驗目標】數列與級數、數據分析

【解析】總和為 $1^2\times10+2^2\times9+3^2\times8+\cdots+10^2\times1$，

每一項形式為 $k^2(11-k)=11k^2-k^3$，$k=1,2,3,\cdots,10$，

總和為 $1^2\times(11-1)+2^2\times(11-2)+3^2\times(11-3)+\cdots+10^2\times(11-10)$，

$=11(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$=11\times\dfrac{1}{6}\times10(10+1)(2\times10+1)-\dfrac{1}{4}\times10^2(10+1)^2$

$=55\times22$，

$\Rightarrow$ 算術平均數為 22，

故選(4)。

3. 【測驗目標】多項式函數

【解析】因 $y=f(x)$ 是最高次項係數為 2 的三次多項函數，

且在 $x=2$ 的一次近似直線為 $y=9x-11$

所以設 $y=f(x)=2(x-2)^3+b(x-2)^2+9x-11$，

又因 $y=f(x)$ 的圖形過 $(1,2)$

$\Rightarrow 2=f(1)=-2+b-2\Rightarrow b=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2(x-2)^3+6(x-2)^2+9x-11$

$\Rightarrow f(3)=24$，

故選(3)。

4. 【測驗目標】排列組合與機率

【解析】7 張椅子，由左至右編號 1~7 號。

若甲坐 4 號椅子，則乙、丙兩人有 4 種坐法；

若甲坐 5 號椅子，則乙、丙兩人有 4 種坐法；

若甲坐 6 號椅子，則乙、丙兩人有 6 種坐法；

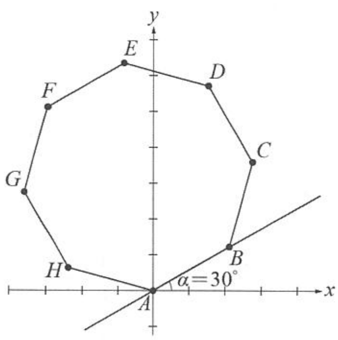
若甲坐 7 號椅子，則乙、丙兩人有 8 種坐法。

所以此三人共有 $4+4+6+8=22$ 種坐法。

故選(1)。

5. 【測驗目標】三角比

【解析】如下圖，設 $\overline{AB}$ 落在斜率為 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan30^\circ$ 的直線，



則 $m_{AB}=m_{EF}=\tan30^\circ$、$m_{BC}=m_{FG}=\tan75^\circ$、

$m_{CD}=m_{GH}=\tan120^\circ$、$m_{DE}=m_{AH}=\tan165^\circ$，

得最大值 $\alpha=\tan75^\circ=2+\sqrt{3}$、

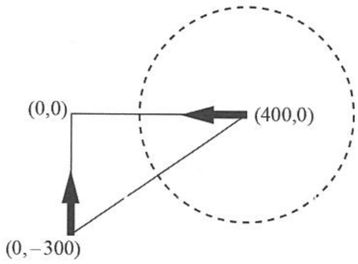
最小值 $\beta=\tan120^\circ=-\sqrt{3}$，

故 $(1-\alpha)(1+\beta)=(-1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=2$，

故選(5)。

6. 【測驗目標】直線與圓、三角比

【解析】



因船位於颱風中心的西 θ 南，其中 $\theta=\sin^{-1}0.6$，

且與颱風中心相距 500 公里，故設船位置 $(0,-300)$、

颱風中心位置 $(400,0)$，兩者均向原點 $(0,0)$ 前進。

經過 n 小時後，船位置為 $(0,-300+9n)$、

颱風中心位置 $(400-12n,0)$，

進入暴風圈時兩者距離小於等於 300，

得 $\sqrt{(400-12n)^2+(-300+9n)^2}\le300$

$\Rightarrow\sqrt{25(100-3n)^2}\le300$

$\Rightarrow|100-3n|\le60\Rightarrow\dfrac{40}{3}\le n\le\dfrac{160}{3}$，$n$ 最小整數值為 14，

故選(2)。

二、多選題

7. 【測驗目標】多項式函數

【解析】

(1) × (2) ○：

因 $f(x)$ 為首項係數為 1 的多項式函數，

$f(x)=g(x)(3-x)+(2x-5)\cdots$①

$\Rightarrow y=g(x)$ 為首項係數為 -1 之二次多項式

$\Rightarrow y=g(x)$ 之圖形為開口向下的拋物線，

又 $g(1)=2$ 表示 $y=g(x)$ 通過點 $(1,2)$

$\Rightarrow y=g(x)$ 和 x 軸交兩點

$\Rightarrow$ 方程式 $g(x)=0$ 有相異兩實根。

(3) ×：由①知 $f(1)=g(1)\times2-3=1$

$\Rightarrow f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 1。

(4) ○：由①知 $f(3)=1$，又 $f(1)=1$ 且 $f(x)$ 為首項係數是 1 的三次多項式函數

$\Rightarrow f(x)=(3-x)(1-x)(x+a)+1\cdots$②

$\Rightarrow f(x)$ 除以 $(3-x)(1-x)$ 的餘式為 1。

(5) ×：由②知 $f(2)=-(2+a)+1$，若 $f(2)=6$，

則 $a=-7\Rightarrow f(x)=(3-x)(1-x)(x-7)+1$

$\Rightarrow f(4)=-8$。

故選(2)(4)。

8. 【測驗目標】多項式函數

【解析】若所有解為單一開區間 $\alpha<x<\beta$，

即可以表示為 $|x-a|<b$ 的形式。

(1) ○：$(x-1)(x-2)<3\Rightarrow\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$，

故可。

(2) ×：$(x-1)(x-2)(x-3)<-6\Rightarrow x^3-6x^2+11x<0$

$\Rightarrow x(x^2-6x+11)<0$

$\Rightarrow x<0$，故不可。

(3) ○：$(x-1)^{114}(x-2)^{2025}(x-3)<0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3)<0$ 但 $x\neq 1 \Rightarrow 2<x<3$，故可。

(4) ×：$(x-1)(x-2)^{114}(x-3)^{2025}<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)<0$ 但 $x\neq 2$

$\Rightarrow 1<x<3$ 但 $x\neq 2$，故不可。

(5) ×：$(x-1)(x-2)^{114}(x-3)^{2025}\leq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)\leq 0$ 但 $x=2$

$\Rightarrow 1\leq x\leq 3$，非開區間，故不可。

故選(1)(3)。

9.【測驗目標】數據分析

【解析】

(1) × (2) ○：

因 x、y 的相關係數與 x'、y' 的相關係數相同，

由迴歸直線方程式 $y'=\dfrac{4}{5}x'$，可知相關係數為 $\dfrac{4}{5}$。

(3) ○：由學測級分（y）對模擬考級分（x）的迴歸直線方程式斜率 $\dfrac{4}{3}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\sigma_y>\sigma_x$。

(4) ○：因對於所有的正數 x 滿足 $x<\dfrac{4}{3}x+1$，

又 (μ_x,μ_y) 必在直線 $y=\dfrac{4}{3}x+1$ 上，

則 $\mu_x<\dfrac{4}{3}\mu_x+1=\mu_y$，

得 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{40}}{40}<\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_{40}}{40}$，

故 $x_1+x_2+\cdots+x_{40}<y_1+y_2+\cdots+y_{40}$。

(5) ×：因標準化數據必滿足 $\mu_{x'}=\mu_{y'}=0$ 且 $\sigma_{x'}=\sigma_{y'}=1$，

則 $\sqrt{\dfrac{(x_1')^2+(x_2')^2+\cdots+(x_n')^2}{n}-0^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(y_1')^2+(y_2')^2+\cdots+(y_n')^2}{n}-0^2}=1$，

故 $(x_1')^2+(x_2')^2+\cdots+(x_{40}')^2$

$=(y_1')^2+(y_2')^2+\cdots+(y_{40}')^2$

$=(1^2+0^2)\cdot 40=40$。

故選(2)(3)(4)。

10.【測驗目標】數列與級數

【解析】設數列 $\langle b_n\rangle$ 的公差為 d，

(1) ○：$a_1=b_1>0$，$b_3=a_3=a_1r^2>0$

$\Rightarrow a_2=a_1r<0$、$b_2=\dfrac{b_1+b_3}{2}>0\Rightarrow a_2\neq b_2$。

(2) ×：當 $r=-1$、$d=0$ 時 $a_5=a_1(-1)^4=a_1=b_1$，

$b_5=b_1+4\times 0=b_1$，則 $a_5=b_5$。

(3) ○：$a_3<a_1\Rightarrow b_3<b_1\Rightarrow d<0$

$\Rightarrow b_1>b_2>b_3>\cdots>b_k>b_{k+1}>\cdots$。（$k$ 為正整數）

(4) ×：$a_3=a_1r^2<a_1\Rightarrow r^2<1\Rightarrow |r|<1$，

又 $|a_1-a_3|=|a_1-a_1r^2|$

$\Rightarrow |a_2-a_4|=|a_1r-a_1r^3|=|r||a_1-a_1r^2|$

$<|a_1-a_1r^2|=|a_1-a_3|$。

(5) ○：$a_3=a_1r^2>a_1\Rightarrow r^2>1$，

又 $|a_5-a_3|=|a_1r^4-a_1r^2|=a_1r^2(r^2-1)$

$\Rightarrow |b_5-b_3|=|2d|=|b_3-b_1|=|a_3-a_1|=a_1r^2-a_1$

$=a_1(r^2-1)<a_1r^2(r^2-1)=|a_5-a_3|$。

故選(1)(3)(5)。

11.【測驗目標】排列組合與機率

【解析】

(1) ○：「中三星」的機率為 $\dfrac{3}{3\times 6\times 9}=\dfrac{1}{54}$。

(2) ×：取到的三球有 1 號、4 號、5 號，其中 1 號球必取自紅箱，4 號、5 號則分別取自白箱、黃箱或黃箱、白箱兩種可能，機率為 $\dfrac{2}{3\times 6\times 9}=\dfrac{1}{81}$。

(3) ×：三球中 1 號有兩球、2 號有一球的取法有三種；三球中 1 號有一球、2 號有兩球的取法有三種，

此選項的機率為 $\dfrac{3+3}{3\times 6\times 9}=\dfrac{1}{27}$。

(4) ○：玩一次，沒有獎金的機率為 $\dfrac{3\times 5\times 7}{3\times 6\times 9}=\dfrac{35}{54}$

$\Rightarrow$「中二星」的機率為 $1-\dfrac{1}{54}-\dfrac{35}{54}=\dfrac{1}{3}$。

(5) ○：玩一次的期望值為

$-10\times 1+100\times\dfrac{1}{54}+20\times\dfrac{1}{3}=-1\dfrac{13}{27}$，

即預期損失不超過 2 元。

故選(1)(4)(5)。

12.【測驗目標】直線與圓

【解析】

(1) ×：已知圓 C 內及圓上的範圍可以表為

$(x-3)^2+(y+4)^2\leq 25\cdots\cdots①$，

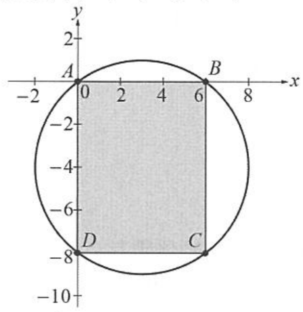
令 $y=0$ 代入①，得 $(x-3)^2+16\leq 25$

$\Rightarrow (x-3)^2\leq 9\Rightarrow |x-3|\leq 3$，故 $(a,b)=(3,3)$；

令 $x=0$ 代入①，得 $9+(y+4)^2\leq 25$

$\Rightarrow (y+4)^2\leq 16\Rightarrow |y+4|\leq 4$，故 $(c,d)=(4,4)$，

得數對 $(b,d)=(3,4)$。



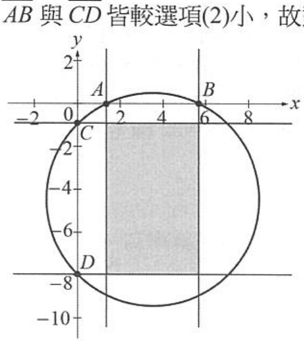
(2) ○：$\Omega:\begin{cases}|x-3|\leq 3\\|y+4|\leq 4\end{cases}\Rightarrow\Omega:\begin{cases}0\leq x\leq 6\\-8\leq y\leq 0\end{cases}$ 為一矩形，

故面積為 $6\cdot 8=48$。

(3) ○：包含矩形 $\Omega:\begin{cases}0\leq x\leq 6\\-8\leq y\leq 0\end{cases}$ 的最小圓為以 $(0,0)$ 及 $(6,-8)$ 為直徑的圓，即為圓 C。

(4) ×：如下圖，$C:(x-3.5)^2+(y+4.5)^2=25$，

$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 皆較選項(2)小，故對應的面積會小於 48。



(5) ×：如上圖，包含 Ω 最小圓非圓 C。

故選(2)(3)。

三、選填題

13.【測驗目標】排列組合與機率

【解析】

金額	1000	2000	400	1200	2200
機率	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}$	$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}$

如上表所列，期望值為

$1000\cdot\dfrac{1}{5}+2000\cdot\dfrac{1}{5}+400\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}+1200\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}+2200\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=1230$（元）。

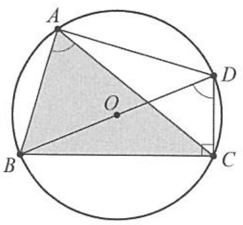
14. 【測驗目標】排列組合與機率
【解析】由 A 點到 B 點共有 $2\times4=8$ 條路，
將此 8 條路列舉後可得下表。

路徑長	2	4	6	8
條數	1	3	2	2

每條路徑被選擇的機會均為 $\frac{1}{8}$。
各路徑長的總和為
$4\times(2\times1+4\times3+6\times2+8\times2)=168$ 公分，
故所求為 $168\times\frac{1}{8}=21$。

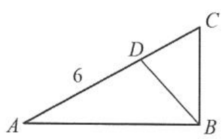
15. 【測驗目標】數據分析
【解析】設 10 筆數據為 $x_1, x_2, \cdots, x_8, x_9=70, x_{10}=90$，
由 $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=84\\ \sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2}{10}-\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}\right)^2}=8\end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_{10}=840\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=(8^2+84^2)\cdot10=71200\end{cases}$，
又 $x_9=70, x_{10}=90$，
得 $\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_8=840-90-70=680\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2=71200-8100-4900=58200\end{cases}$，
故刪除後 8 個數據之算術平均數 $=\frac{680}{8}=85$ 分，
則標準差 $=\sqrt{\frac{58200}{8}-85^2}=5\sqrt{2}$ 分。

16. 【測驗目標】直線與圓、三角比
【解析】$\cos(\angle BDC)=\cos(\angle BAC)=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}$，
則 $\overline{BD}=\frac{\overline{BC}}{\cos30^\circ}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，故由 $\triangle ABD$，
$\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\cos\angle BDA=\overline{BD}\cdot\cos\angle BCA$
$=\frac{14}{\sqrt{3}}\cdot\frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{11}{\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{3}}{3}$。
<另解>
因 $\triangle DBC$ 為直角三角形，
則 $\angle DCB=90^\circ$ 且 $\overline{BD}=2R$。
由海龍公式知
$\triangle ABC$ 面積
$=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}$
$=\frac{5\cdot7\cdot8}{4R}$，



外接圓半徑 $R=\frac{5\cdot7\cdot8}{4\cdot10\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$，
故 $\overline{AD}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2-5^2}=\frac{11\sqrt{3}}{3}$。

17. 【測驗目標】三角比
【解析】依題意作圖如右，

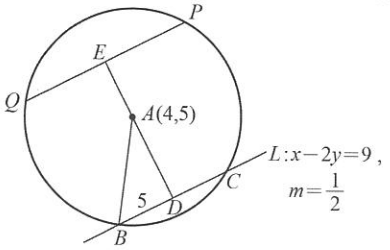


因 $\cos A=\frac{7}{8}$，$\cos\angle ABD=\frac{11}{16}$，
且 $\angle A$、$\angle ABD$ 均為銳角，
可得 $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$、$\sin\angle ABD=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，
在 $\triangle ABD$ 中，$\sin A:\sin\angle ABD=\overline{BD}:6\Rightarrow\overline{BD}=4$，
在 $\triangle BCD$ 中，$\sin C:\sin\angle CBD=4:\overline{CD}$，
其中 $\sin C=\cos A=\frac{7}{8}$、$\sin\angle CBD=\cos\angle ABD=\frac{11}{16}$
$\Rightarrow\overline{CD}=\frac{22}{7}\Rightarrow\overline{AC}=6+\frac{22}{7}=\frac{64}{7}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】直線與圓
【解析】所求 $=\frac{|4-10-9|}{\sqrt{1+4}}=\frac{15}{\sqrt{5}}$，
故選(4)。

19. 【測驗目標】三角比
【解析】依題意作圖如下，設 $\overline{AD}$ 為弦 $\overline{BC}$ 的弦心距



$\Rightarrow\overline{AD}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$、$\overline{BD}=5$
$\Rightarrow r=\overline{AB}=\sqrt{70}$。(2 分)
$\sin\angle BPC=\sin\angle BAD=\frac{5}{\sqrt{70}}$，(2 分)
$\frac{1}{2}\overline{PB}\times\overline{PC}\times\sin\angle BPC=25\sqrt{5}$
$\Rightarrow\overline{PB}\times\overline{PC}=50\sqrt{14}$。(2 分)

20. 【測驗目標】直線與圓
【解析】過 P 點作弦 $\overline{PQ}$ // 弦 $\overline{BC}$，設 $\overline{AE}$ 為弦 $\overline{PQ}$ 的弦心距，
$\frac{1}{2}\times10\,\overline{DE}=25\sqrt{5}\Rightarrow\overline{DE}=5\sqrt{5}$
設直線 PQ 為 $x-2y=k$
(因為直線 PQ 在 L 線的左上方，所以 $k<9$)，
直線 PQ 和直線 L 相距 $5\sqrt{5}$
$\Rightarrow\frac{|9-k|}{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}\Rightarrow k=-16$
$\Rightarrow$ 直線 PQ 為 $x-2y=-16$。(2 分)
圓 Γ：$(x-4)^2+(y-5)^2=70$，
$\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=70\\ x-2y=-16\Rightarrow x=2y-16 \text{ 代入上式}\end{cases}$
$\Rightarrow(2y-16-4)^2+(y-5)^2=70$
$\Rightarrow(x, y)=(2+2\sqrt{10}, 9+\sqrt{10})$、$(2-2\sqrt{10}, 9-\sqrt{10})$
因為 $\overline{PB}>\overline{PC}$，所以 $P(2+2\sqrt{10}, 9+\sqrt{10})$。(4 分)
<另解>
過 P 點作弦 $\overline{PQ}$ // 弦 $\overline{BC}$，
設 $\overline{AE}$ 為弦 $\overline{PQ}$ 的弦心距，$\frac{1}{2}\times10\,\overline{DE}=25\sqrt{5}$
$\Rightarrow\overline{DE}=5\sqrt{5}$ 又 $\overline{AD}=3\sqrt{5}\Rightarrow\overline{AE}=2\sqrt{5}$
$\Rightarrow\overline{PE}=5\sqrt{2}$，(2 分)
直線 L 的斜率為 $\frac{1}{2}\Rightarrow\overline{AE}$ 的斜率為 -2、$\overline{PE}$ 的斜率為 $\frac{1}{2}$
$\Rightarrow E\left(4-2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}, 5+2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=(2, 9)$ (2 分)
$\Rightarrow P\left(2+5\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}, 9+5\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
$=P(2+2\sqrt{10}, 9+\sqrt{10})$。(2 分)