數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(5)	(3)	(2)	(2)	(4)	(1)(5)
8.	9.	10.	11.			
(1)(3)	(1)(3)(5)	(3)(4)	(1)(3)(4)(5)			

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數與對數的轉換

解析：∵經過 1 日後細菌的數量會變為前一天的 1.57 倍

而 $1.57 \approx 10^{0.1959}$

$\therefore (1.57)^{30} \approx 10^{5.877}$

原來有 1000 隻細菌，

則 $x=1000\times(1.57)^{30} \approx 1000\times10^{5.877}=10^{8.877}$

$\therefore 10^{8}<x<10^{9}$

故選(4)。

2. (5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：根式的化簡

解析：$\sqrt{23+8\sqrt{7}}=\sqrt{16+2\times\sqrt{16\times7}+7}$

$=\sqrt{16}+\sqrt{7}$

$=4+\sqrt{7}\approx 6.646$

$\therefore a=6$，$b=\sqrt{7}-2$

則 $\dfrac{3}{a+3b}=\dfrac{3}{6+3\sqrt{7}-6}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

故選(5)。

3. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用題目敘述畫出三次函數圖形，並求出三次函數及其對稱中心

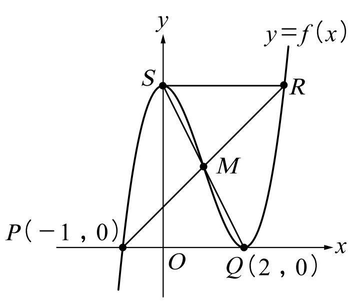
解析：將 $P(-1,0)$與 $Q(2,0)$ 代入 $f(x)$，

可求得 $b=-3$，$d=4$，則 $f(x)=x^3-3x^2+4$

$y=f(x)$ 圖形的對稱中心 M 坐標為

$\left(\dfrac{-(-3)}{3\cdot1},\ f\left(\dfrac{-(-3)}{3\cdot1}\right)\right)=(1,f(1))=(1,2)$

如下圖



又 $\overline{PM}=\overline{MR}$，$\overline{QM}=\overline{MS}$

可得 $PQRS$ 為平行四邊形，且 $\overline{PQ}=\overline{RS}=3$

因此，$\triangle MRS$ 面積$=\triangle PQM$ 面積$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$

故選(3)。

4. (2)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：可以透過等比數列的前後項關係解決問題

解析：由題意可知 $\dfrac{\frac{b}{10}}{\frac{a}{5}}=\dfrac{\frac{c}{15}}{\frac{b}{10}}$

推得 $4ac=3b^2$

$\because 1<a<b<c<9\quad \therefore a=2$，$b=4$，$c=6$

公比$=\dfrac{\frac{b}{10}}{\frac{a}{5}}=\dfrac{\frac{4}{10}}{\frac{2}{5}}=1$

故選(2)。

5. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用組合求分組方法數，並運用取捨原理

解析：n(平分四組)$-n$(甲乙同組)$-n$(乙丙同組)

$-n$(丙丁同組)$+n$(甲乙同組且丙丁同組)

$=C^8_2C^6_2C^4_2C^2_2\dfrac{1}{4!}-C^6_2C^4_2C^2_2\dfrac{1}{3!}-C^6_2C^4_2C^2_2\dfrac{1}{3!}-C^6_2C^4_2C^2_2\dfrac{1}{3!}$

$+C^4_2C^2_2\dfrac{1}{2!}=63$ (種)

故選(2)。

〈另解〉

n(甲$+1$，乙$+1$，丙$+1$，丁$+1$)

$+n$(甲丙，乙$+1$，丁$+1$, 2)

$+n$(甲丙，乙丁, 2, 2)

$+n$(甲丁，乙$+1$，丙$+1$, 2)

$+n$(甲$+1$，乙丁，丙$+1$, 2)

$=C^4_1C^3_1C^2_1C^1_1+C^4_1C^3_1C^2_2+C^4_2C^2_2\dfrac{1}{2!}+C^4_1C^3_1C^2_2+C^4_1C^3_1C^2_2$

$=24+12+3+12+12=63$ (種)

故選(2)。

6. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：利用正餘弦定理，並配合面積公式，求出外接圓與內切圓半徑

解析：∵$\triangle ABC$ 三邊中 $\overline{AC}$ 最長，且 $\overline{AC}$ 的對應邊為 $\overline{DF}$

∴ $\overline{DF}$ 為$\triangle DEF$ 的最長邊

設圓半徑為 r

則在$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{1}{5}$

可得 $\sin B=\sin E=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{5\cdot r}{2}+\dfrac{6\cdot r}{2}+\dfrac{7\cdot r}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\sin B$

可得 $r=5\cdot6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\dfrac{1}{18}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

又在$\triangle DEF$ 中，$\dfrac{\overline{DF}}{\sin E}=2r$

$\Rightarrow \overline{DF}=\sin E\cdot 2r=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{16}{5}$

故選(4)。

二、多選題

7. (1)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：實數的估算與絕對值不等式

解析：設數線上點 x 滿足題意

則 $\begin{cases} |x-\sqrt{120}|>8 \\ |x-\sqrt{5}|<1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>\sqrt{120}+8 \text{ 或 } x<\sqrt{120}-8 \\ \sqrt{5}-1<x<\sqrt{5}+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{5}-1<x<\sqrt{120}-8$

又 $\sqrt{5}-1\approx 1.236$，$\sqrt{120}-8\approx 2.954$

(1) ○：$10^{\log 2}=2$

(2) ╳：$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3>2.954$

(3) ╳：$100000^0=1<1.236$

(4) ╳：$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=2+\sqrt{3}\approx 3.732>2.954$

(5) ○：$\pi-1\approx 2.142$

故選(1)(5)。

8. (1)(3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次不等式與圓方程式

解析：(1) ○：$\because L_3$ 過 A、B 兩點

$\therefore$ 斜率為 $\dfrac{11-3}{-5-1}=-\dfrac{4}{3}$

(2) ╳：L_1 的方程式為 $x+5=0$，

L_2 的方程式為 $y-3=0$，

又直線 L_3 的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$，且過點 $B(1, 3)$

$\therefore L_3$ 的方程式為 $y-3=-\dfrac{4}{3}(x-1)$

$\Rightarrow 4x+3y-13=0$

$\therefore \triangle ABC$ 內部(包含邊界)的聯立不等式為

$\begin{cases} x+5\geq 0 \\ y-3\geq 0 \\ 4x+3y-13\leq 0 \end{cases}$

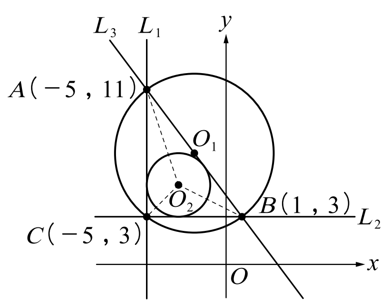
(3) ○：$\because \angle C=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圓圓心 O_1 為斜邊 $\overline{AB}$ 的中點

$\left(\dfrac{-5+1}{2}, \dfrac{11+3}{2}\right)=(-2, 7)$

外接圓半徑為 $\sqrt{[1-(-2)]^2+(3-7)^2}=5$

故外接圓方程式為 $(x+2)^2+(y-7)^2=25$



(4) ╳：$\triangle ABC$ 的三邊長為 $\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=8$，$\overline{AB}=10$

設內切圓半徑為 r，則 $\triangle ABC$ 的面積為

$\dfrac{6\times 8}{2}=\dfrac{6\times r}{2}+\dfrac{8\times r}{2}+\dfrac{10\times r}{2}$

$\Rightarrow r=\dfrac{6\times 8}{6+8+10}=2$

故 $\triangle ABC$ 的外接圓面積 25π 為內切圓面積 4π 的 $\dfrac{25}{4}$ 倍

(5) ╳：$\because$ 內切圓半徑為 2

$\therefore$ 內切圓圓心 O_2 的坐標為 $(-3, 5)$

過 O_1、O_2 的直線斜率為 $\dfrac{7-5}{-2-(-3)}=2$

故過 O_1、O_2 的直線方程式為 $y-5=2(x+3)$

$\Rightarrow y=2x+11$

故選(1)(3)。

9. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：理解多項式函數的圖形特徵，並能用以解決問題

解析：(1) ○：$f(x)=-x^2-4x+2=-(x+2)^2+6$

頂點坐標為 $(-2, 6)$

(2) ╳：不等式 $f(x)<0$ 的解為 $x<-2-\sqrt{6}$ 或 $x>-2+\sqrt{6}$

(3) ○：$y=f(x)$ 圖形的頂點坐標與 $y=g(x)$ 的對稱中心相同，假設 $g(x)=(x+2)^3+p(x+2)+6$

又 $y=g(x)$ 圖形通過原點，則 $0=8+2p+6$

$\Rightarrow p=-7$

故 $g(x)=(x+2)^3-7(x+2)+6=x^3+6x^2+5x$

得 $b=6$，$c=5$，$d=0\Rightarrow b+c+d=11$

(4) ╳：$y=g(x)$ 在 $x=-2$ 附近的局部特徵(一次近似)近似於直線 $y=-7(x+2)+6\Rightarrow y=-7x-8$

(5) ○：方程式 $g(x)=x^3+6x^2+5x=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x+5)=0\Rightarrow x=0$ 或 -1 或 -5

故 $g(x)=0$ 有 3 個整數解

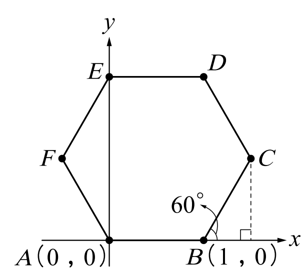
故選(1)(3)(5)。

10. (3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：認識排列組合的計數模型，理解其運算原理，並能用以解決問題

解析：(1) ╳：如下圖



C 點坐標為

$(1+\cos 60^\circ, 0+\sin 60^\circ)=\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) ╳：$\overline{AC}$，$\overline{AE}$，$\overline{BD}$，$\overline{BF}$，$\overline{CE}$，$\overline{DF}$

共 6 條對角線

(3) ○：在正六邊形的六個頂點中隨機選取相異兩點，共 $C^6_2=15$ 條直線

連接兩點所得線段長為 1 的有 6 條，長為 $\sqrt{3}$ 的有 6 條，長為 2 的有 3 條

故所得線段長為 2 的機率為 $\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

(4) ○：$\triangle ACE$ 的面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3})^2=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

(5) ╳：在正六邊形的六個頂點中隨機選取相異三點，共 $C^6_3=20$ 個三角形

其中 $60^\circ-60^\circ-60^\circ$ 的三角形有 2 個，

面積為 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

$30^\circ-30^\circ-120^\circ$ 的三角形有 6 個，

面積為 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的三角形有 12 個，

面積為 $\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所求期望值為

$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{3}{4}\sqrt{3}+\dfrac{6}{20}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{12}{20}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{20}\sqrt{3}$

故選(3)(4)。

11. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：一維數據的平均數

解析：(1) ○：「信用卡」付款的比例最高

(2) ╳：人數不確定，所以比例無法得知

(3) ○：電子購物業中，「現金 (含貨到付款)」：

$\dfrac{8.1-14.7}{14.7}\approx-0.4490$，衰退約 45 %

「信用卡」：$\dfrac{57.7-66.9}{66.9}\approx-0.1375$，衰退約 14 %

(4) ○：四年中，在實體零售業，使用「行動支付」付款方式的年平均成長率為 $\left(\sqrt[4]{\dfrac{11.4}{1.7}}-1\right)\times100$ %

(5) ○：實體零售業中，從 2019 年到 2023 年使用「行動支付」付款方式約增長 $\dfrac{11.4}{1.7}\approx6.7$ 倍，所以 2027 年時約為 11.4 %×6.7＝76.38 %，超過七成

故選(1)(3)(4)(5)。

三、選填題

12. (5 , 0)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理

解析：$\because f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 5　$\therefore f(1)=5$

且 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $ax+b$

設 $f(x)=(x^2-1)\,Q(x)+ax+b$ ……………(＊)

將 $f(1)=5$ 且 $f(-1)=-5$ 代入(＊)得 $\begin{cases}a+b=5\\-a+b=-5\end{cases}$

$\Rightarrow a=5$，$b=0$

故數對 $(a\,,b)=(5\,,0)$。

13. 1

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：標準差計算

解析：設 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$

由題意知 $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=2\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=8$

中位數＝$2\Rightarrow\dfrac{x_2+x_3}{2}=2\Rightarrow x_2+x_3=4$

標準差最大 $\Rightarrow x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=3$，$x_4=3$

即 $(x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4)=(1\,,1\,,3\,,3)$

此時標準差 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(1-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2}{4}}$

$=1$。

14. 1.74

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數

解析：$11600=730\times k^5$，則 $k^5\approx15.89$

又 $1.735^5\approx15.722$，$1.74^5\approx15.949$

$\therefore 15.722<k^5\approx15.89<15.949$

$\Rightarrow 1.735<k<1.74$

故 $k=1.74$。

15. -2

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理與除法原理

解析：$x=a$ 代入 $x^2-4x+1=0$ 得 $a^2-4a+1=0$

$\Rightarrow a^2+1=4a$

使用長除法如下

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2a^2-a+3 \\
\hline
a^2-4a+1 & 2a^4-9a^3+9a^2-12a-3 \\
 & 2a^4-8a^3+2a^2 \\
\cline{2-2}
 & -a^3+7a^2-12a \\
 & -a^3+4a^2-a \\
\cline{2-2}
 & 3a^2-11a-3 \\
 & 3a^2-12a+3 \\
\cline{2-2}
 & a-6
\end{array}
$$

$\Rightarrow 2a^4-9a^3+9a^2-12a-3+\dfrac{4}{a^2+1}$

$=(2a^2-a+3)(a^2-4a+1)+a-6+\dfrac{4}{4a}$

$=a-6+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2+1}{a}-6=\dfrac{4a}{a}-6=-2$。

16. $\left[1\,,\dfrac{7}{3}\right]$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：點到直線的距離

解析：$A(-1\,,1)$ 關於 $y=a$ 對稱的點為 $A'(-1\,,2a-1)$

$\because B(0\,,a)$ 在直線 $y=a$ 上

$\therefore \overline{A'B}$ 所在直線即為直線 L，

斜率為 $\dfrac{a-(2a-1)}{0-(-1)}=1-a$

直線 L 的方程式為 $y-a=(1-a)x$

即 $(1-a)x-y+a=0$

又圓 C：$(x-3)^2+y^2=1$ 的圓心為 $(3, 0)$，半徑 $r=1$

依題意，圓心 $(3, 0)$ 到直線 L 的距離為

$$\frac{|3(1-a)+a|}{\sqrt{(1-a)^2+1}} \le 1$$

即 $(-2a+3)^2 \le (1-a)^2+1 \Rightarrow 3a^2-10a+7 \le 0$

$\Rightarrow (3a-7)(a-1) \le 0$

解得 $1 \le a \le \frac{7}{3}$，即 $a \in \left[1, \frac{7}{3}\right]$。

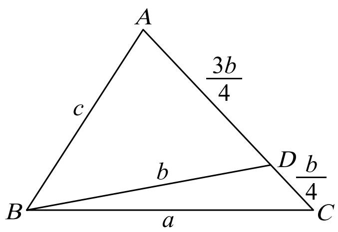
17. $\frac{13}{24}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理

解析：因為 $\overline{AD}=3\overline{CD}$，令 $\overline{CD}=\frac{b}{4}$，$\overline{AD}=\frac{3b}{4}$

作示意圖如下



在△ABC 中，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ……………①

在△BCD 中，$\cos C=\frac{a^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2-b^2}{2a\cdot\frac{b}{4}}$ ………②

由①、②得 $a^2+b^2-c^2=4\left[a^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2-b^2\right]$

整理得 $12a^2-19b^2+4c^2=0$

又因為 $b^2=ac$，代入得 $12a^2-19ac+4c^2=0$

$\Rightarrow (4a-c)(3a-4c)=0$

解得 $a=\frac{c}{4}$ 或 $a=\frac{4c}{3}$

當 $a=\frac{c}{4}$ 時，$b^2=ac=\frac{c^2}{4} \Rightarrow b=\frac{c}{2}$

此時 $a+b=\frac{c}{4}+\frac{c}{2}<c$ (不合)

當 $a=\frac{4c}{3}$ 時，$b^2=ac=\frac{4c^2}{3}$，

故 $\cos\angle ABC=\frac{\left(\frac{4c}{3}\right)^2+c^2-\frac{4c^2}{3}}{2\cdot\frac{4c}{3}\cdot c}=\frac{13}{24}$。

第貳部分：混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：認識排列的計數模型，理解其運算原理，並能用於解決問題

解析：住宿選擇可視作為將 3 間不同的小木屋排成一列

安排方式共有 $3!=6$ 種

故選(3)。

19. 2 種

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：理解基本計數原理，能運用策略與原理，窮舉所有狀況

解析：丁小姐和呂先生的住宿順序安排如下樹狀圖

王先生 ABC — 丁小姐 BCA —— 呂先生 CAB

王先生 ABC — 丁小姐 CAB —— 呂先生 BCA

共 2 種。

◎評分原則

丁小姐和呂先生的住宿順序安排如下樹狀圖

王先生 ABC — 丁小姐 BCA —— 呂先生 CAB

王先生 ABC — 丁小姐 CAB —— 呂先生 BCA

共 2 種。 (4 分)

20. 1056 種

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：認識排列的計數模型，理解其運算原理，並能用於解決問題

解析：3 人一起安排行程，仍可視作先安排王先生的順序後，再安排其餘 2 人的順序，故王先生從 4 間挑選 3 間排成一列，共有 $P^4_3=24$ 種安排方式

不失一般性，設王先生的住宿順序是 DEF，再安排丁小姐之住宿，分作兩大分類進行討論：

⑴丁小姐的第 1 天住宿是王先生所選之房間 (E、F 其中之一)，不失一般性，先設丁小姐第一天入住 E：

情形	丁小姐			呂先生 3 天選擇
	第 1 天不選 D	第 2 天不選 E	第 3 天不選 F	
①	E	D	G	FGD、FGE、GFE、GFD
②	E	F	D	FDE、FDG、FGE、GDE
③	E	F	G	FDE、FGD、FGE、GDE
④	E	G	D	FDE、FDG、GDE、GFE

⑵丁小姐的第 1 天住宿非王先生所選之房間：

情形	丁小姐			呂先生 3 天選擇
	第 1 天不選 D	第 2 天不選 E	第 3 天不選 F	
⑤	G	D	E	EFD、EFG、EGD、FGD
⑥	G	F	D	EDG、FDE、FDG、FGE
⑦	G	F	E	EDG、EGD、FDG、FGD

可知無論王先生、丁小姐的順序安排為何，呂先生均為 4 種安排

故總方法數為：

$$\underset{\substack{\text{王先生}\\\text{所有方法}}}{\underline{24}} \times \left(\underset{\substack{\text{丁小姐}\\\text{①②③④}}}{4} \times \underset{\substack{\text{由⑴知}\\\text{有兩類}}}{2} + \underset{\substack{\text{丁小姐}\\\text{⑤⑥⑦}}}{3} \right) \times \underset{\text{呂先生}}{4} = 1056 \text{ (種)}。$$

◎評分原則

3 人一起安排行程，仍可視作先安排王先生的順序後，再安排其餘 2 人的順序

故王先生從 4 間挑選 3 間排成一列

共有 $P^4_3 = 24$ 種安排方式

不失一般性，設王先生的住宿順序是 DEF，再安排丁小姐之住宿

分作兩大分類進行討論：

⑴丁小姐的第 1 天住宿是王先生所選之房間 (E、F 其中之一)，不失一般性，先設丁小姐第一天入住 E：

情形	丁小姐			呂先生 3 天選擇
	第 1 天不選 D	第 2 天不選 E	第 3 天不選 F	
①	E	D	G	FGD、FGE、GFE、GFD
②		F	D	FDE、FDG、FGE、GDE
③		F	G	FDE、FGD、FGE、GDE
④		G	D	FDE、FDG、GDE、GFE

⑵丁小姐的第 1 天住宿非王先生所選之房間：

情形	丁小姐			呂先生 3 天選擇
	第 1 天不選 D	第 2 天不選 E	第 3 天不選 F	
⑤	G	D	E	EFD、EFG、EGD、FGD
⑥		F	D	EDG、FDE、FDG、FGE
⑦		F	E	EDG、EGD、FDG、FGD

可知無論王先生、丁小姐的順序安排為何，呂先生均為 4 種安排，故總方法數為：

$$\underset{\substack{\text{王先生}\\\text{所有方法}}}{\underline{24}} \times \left(\underset{\substack{\text{丁小姐}\\\text{①②③④}}}{4} \times \underset{\substack{\text{由⑴知}\\\text{有兩類}}}{2} + \underset{\substack{\text{丁小姐}\\\text{⑤⑥⑦}}}{3} \right) \times \underset{\text{呂先生}}{4} = 1056 \text{ (種)}。$$

(2 分) (3 分) (3 分)